

SUR LA TOPOLOGIE DES VARIÉTÉS ALGÈBRIQUES EN CARACTÉRISTIQUE p .

JEAN-PIERRE SERRE

Introduction

Comme l'a signalé A. Weil, l'un des problèmes les plus intéressants de la géométrie algébrique sur un corps de caractéristique $p > 0$ est de donner une définition satisfaisante des "nombres de Betti" et des "groupes d'homologie" d'une variété algébrique X (supposée projective et non singulière).

En ce qui concerne les nombres de Betti, j'avais proposé dans [13] de les définir par la formule suivante (imitée du cas classique):

$$B_n = \sum_{r+s=n} h^{r,s} \quad \text{où} \quad h^{r,s} = \dim H^s(X, \Omega^r),$$

Ω^r désignant le faisceau des germes de formes différentielles régulières de degré r sur X .

Les B_n ainsi définis ont certaines des propriétés que l'on est en droit d'attendre de "nombres de Betti": par exemple, ils vérifient la "dualité de Poincaré" $B_n = B_{2d-n}$ si $d = \dim X$, cf. [13]. Cependant des résultats récents ont montré qu'ils peuvent posséder des propriétés pathologiques: c'est ainsi que, si g désigne la dimension de la variété d'Albanese de X , on peut avoir $g < h^{0,1}$ (Igusa [6]), et aussi $h^{0,1} \neq h^{1,0}$ (cf. n° 20). Ces faits montrent que les B_n ne fournissent, tout au plus, qu'une *majoration* des nombres de Betti cherchés.

D'ailleurs, si l'on se place au point de vue "groupes d'homologie", l'insuffisance des $H^s(X, \Omega^r)$ est claire: ce sont des espaces vectoriels de caractéristique p , alors que, comme l'a mis en évidence Weil, on a besoin de groupes de caractéristique zéro, de façon à pouvoir y définir des traces et démontrer une *formule de Lefschetz* (donnant le nombre de points fixes d'une application régulière de X dans lui-même).

Dans le présent mémoire nous indiquons comment l'on peut effectivement attacher à X des groupes H^a qui soient des modules sur un anneau Λ de caractéristique zéro, analogue à l'anneau des entiers p -adiques; ces groupes sont définis comme les limites projectives des groupes de cohomologie de X à valeurs dans des *faisceaux de vecteurs de Witt*. Ces groupes de cohomologie sont étudiés dans le §1; on y verra notamment comment on peut définir la *torsion* de X , au moyen d'opérations semblables à celles de Bockstein; il semble bien que ce soit cette torsion qui soit responsable des phénomènes pathologiques cités plus haut. Nous avons dû laisser sans réponse une question importante: les H^a sont-ils des Λ -modules de type fini? (c'est vrai si $g = 0$ ou 1). De plus, les H^a ne constituent certainement qu'une partie de la cohomologie de X , celle qui correspond aux $h^{0,a}$ du cas classique: c'est dire que nous n'avons encore aucune définition raisonnable des "nombres de Betti" à proposer.

Le cas des courbes, auquel est consacré le §2, est cependant encourageant. Le Λ -module H^1 est alors un Λ -module libre de rang égal à $2g - \sigma$, g désignant le genre de X et σ le rang du groupe des éléments d'ordre p de la jacobienne de X ; l'entier σ peut être déterminé au moyen de la *matrice de Hasse-Witt* de X . Dans les démonstrations, un rôle décisif est joué par une opération sur les formes différentielles qui vient d'être introduite par P. Cartier; comme les résultats de Cartier sur ce sujet n'ont pas encore été publiés, nous avons reproduit la définition et les principales propriétés de cette opération.

Enfin le §3 montre comment la cohomologie à valeurs dans les vecteurs de Witt permet de classer les revêtements cycliques d'ordre p^n , étendant ainsi aux variétés de dimension quelconque des résultats connus pour les courbes ([5], [12]).

§1. COHOMOLOGIE À VALEURS DANS LES VECTEURS DE WITT

1. Vecteurs de Witt

Soit p un nombre premier qui restera fixé dans toute la suite. Si A est un anneau commutatif, à élément unité, de caractéristique p , nous désignerons par $W_n(A)$ l'anneau des vecteurs de Witt de longueur n à coefficients dans A (cf. [21], §3). Rappelons qu'un élément de $W_n(A)$ est un système $\alpha = (a_0, \dots, a_{n-1})$ avec $a_i \in A$; si $\beta = (b_0, \dots, b_{n-1})$ est un autre vecteur, la somme:

$$\alpha + \beta = (c_0, \dots, c_{n-1})$$

est donnée par des formules:

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 + b_0 \\ c_1 &= a_1 + b_1 - \sum_{m=1}^{m=p-1} \frac{1}{p} \binom{p}{m} a_0^m b_0^{p-m} \\ &\dots \\ c_i &= a_i + b_i + f_i(a_0, b_0, \dots, a_{i-1}, b_{i-1}) \\ &\dots \end{aligned}$$

où les f_i sont des polynômes à coefficients entiers dont on trouvera le procédé de formation dans [21]. De même, la différence et le produit de deux vecteurs sont donnés par des opérations polynomiales.

Les anneaux $W_n(A)$ sont reliés par les opérations suivantes :

(a) L'endomorphisme de Frobenius $F : W_n(A) \rightarrow W_n(A)$ qui applique le vecteur (a_0, \dots, a_{n-1}) sur le vecteur $(a_0^p, \dots, a_{n-1}^p)$.

(b) L'opération de décalage $V : W_n(A) \rightarrow W_{n+1}(A)$ qui applique le vecteur (a_0, \dots, a_{n-1}) sur le vecteur $(0, a_0, \dots, a_{n-1})$.

(c) L'opération de restriction $R : W_{n+1}(A) \rightarrow W_n(A)$ qui applique le vecteur (a_0, \dots, a_n) sur le vecteur (a_0, \dots, a_{n-1}) .

Les opérations F et R sont des homomorphismes d'anneaux; elles commutent entre elles. L'opération V est additive, et vérifie l'identité $(Vx) \cdot y = V(x \cdot FRy)$ pour $x \in W_n(A)$, $y \in W_{n+1}(A)$. On a en outre $RVF = FRV = RFV = p$ (multiplication par p).

Nous noterons $W(A)$ l'anneau des vecteurs de Witt (a_0, \dots, a_n, \dots) de longueur infinie; c'est la limite projective, pour n infini, du système formé par les $W_n(A)$ et les homomorphismes R . Les opérations V et F sont définies sur $W(A)$ et vérifient la relation $VF = FV = p$; comme V et F sont injectives, on en conclut que l'anneau $W(A)$ est un anneau de caractéristique 0.

EXEMPLE. Prenons pour A le corps $F_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$; l'anneau $W_n(F_p)$ est alors canoniquement isomorphe à $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$, et l'anneau $W(F_p)$ est canoniquement isomorphe à l'anneau \mathbf{Z}_p des entiers p -adiques; dans ce cas, l'opération F est l'identité.

Plus généralement, si k est un corps parfait de caractéristique p , l'anneau $W(k)$ est un anneau de valuation discrète, non ramifié, complet, ayant k pour corps des restes (cf. [21], §3); en particulier, $W(k)$ est un anneau principal, d'unique idéal maximal $pW(k)$ vérifiant $W(k)/pW(k) = k$.

2. Faisceaux de vecteurs de Witt sur une variété algébrique

Soit X une variété algébrique définie sur un corps algébriquement clos k de caractéristique p , et soit \mathcal{O} le faisceau de ses anneaux locaux (cf. [14], n° 34). Pour tout $x \in X$, l'anneau \mathcal{O}_x est un anneau de caractéristique p , et, si n est un entier ≥ 1 , on peut former l'anneau $W_n(\mathcal{O}_x)$; lorsque x varie, les $W_n(\mathcal{O}_x)$ forment de façon naturelle un faisceau d'anneaux, que nous noterons \mathcal{W}_n . En tant que faisceau d'ensembles, \mathcal{W}_n est isomorphe à \mathcal{O}^n ; mais, bien entendu, les lois de composition de ces deux faisceaux sont différentes si $n \geq 2$.

Les opérations F , V et R du n° 1 définissent des opérations sur les faisceaux \mathcal{W}_n que nous noterons par les mêmes symboles. On a la suite exacte, valable si $n \geq m$:

$$(1) \quad 0 \rightarrow \mathcal{W}_m \xrightarrow{V^{n-m}} \mathcal{W}_n \xrightarrow{R^m} \mathcal{W}_{n-m} \rightarrow 0.$$

Pour $m = 1$ on a $\mathcal{W}_m = \mathcal{O}$, d'où la suite exacte:

$$(2) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{V^{n-1}} \mathcal{W}_n \xrightarrow{R} \mathcal{W}_{n-1} \rightarrow 0.$$

On voit ainsi que \mathcal{W}_n est extension multiple de n faisceaux isomorphes à \mathcal{O} ; cela permet d'étendre aux \mathcal{W}_n un grand nombre de résultats connus pour le faisceau \mathcal{O} ; par exemple, on peut facilement montrer (en utilisant [14], n°s 13 et 16) que les \mathcal{W}_n sont des faisceaux cohérents d'anneaux, au sens de [14], n° 15.

Puisque les \mathcal{W}_n sont des faisceaux de groupes abéliens, les groupes de cohomologie $H^q(X, \mathcal{W}_n)$ sont définis pour tout entier $q \geq 0$. Si l'on note Λ l'anneau $W(k)$, les \mathcal{W}_n sont des Λ -modules, annihilés par $p^n\Lambda$, et il en est donc de même des $H^q(X, \mathcal{W}_n)$. Les opérations induites par F , V et R sur les $H^q(X, \mathcal{W}_n)$ sont semi-linéaires: on a les formules

$$(3) \quad F(\lambda w) = \lambda^p F(w), \quad V(\lambda w) = \lambda^{p-1} V(w), \quad R(\lambda w) = \lambda R(w), \quad \lambda \in \Lambda.$$

La proposition suivante donne les principales propriétés élémentaires des $H^q(X, \mathcal{W}_n)$:

PROPOSITION 1. (a) On a $H^q(X, \mathcal{W}_n) = 0$ pour $q > \dim X$.

(b) Si X est une variété affine, on a $H^q(X, \mathcal{W}_n) = 0$ pour $q > 0$.

(c) Si X est une variété projective, les Λ -modules $H^q(X, \mathcal{W}_n)$ sont des modules de longueur finie.

(d) Si \mathfrak{U} est un recouvrement fini de X par des ouverts affines, on a $H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{W}_n) = H^q(X, \mathcal{W}_n)$ pour tout $q \geq 0$.

(e) A toute suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{W}_n \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow 0$, où \mathcal{B} et \mathcal{C} sont des faisceaux quelconques, est associée une suite exacte de cohomologie:

$$\cdots \rightarrow H^q(X, \mathcal{W}_n) \rightarrow H^q(X, \mathcal{B}) \rightarrow H^q(X, \mathcal{C}) \rightarrow H^{q+1}(X, \mathcal{W}_n) \rightarrow \cdots$$

Puisque le faisceau \mathcal{O} est un faisceau algébrique cohérent, la suite exacte (2) vérifie les hypothèses du Théorème 5 de [14], n° 47, et l'on obtient une suite exacte de cohomologie:

$$(4) \quad \cdots \rightarrow H^q(X, \mathcal{O}) \rightarrow H^q(X, \mathcal{W}_n) \rightarrow H^q(X, \mathcal{W}_{n-1}) \rightarrow \cdots$$

En utilisant (4), on ramène immédiatement les assertions (a), (b), (c) de la Proposition 1 au cas particulier $n = 1$, où elles sont connues ([15], th. 2-[14], n° 46-[14], n° 66). Les assertions (d) et (e) résultent de (b) en appliquant les raisonnements de [14], n° 47.

REMARQUE. En utilisant (b), on peut montrer que les groupes de cohomologie $H^q(X, \mathcal{W}_n)$, définis ici par la méthode des recouvrements, coïncident avec ceux définis par Grothendieck comme les Ext^n du foncteur $\Gamma(X, \mathcal{F})$.

3. Opérations de Bockstein

La construction des faisceaux \mathcal{W}_n n'est pas spéciale aux variétés algébriques et aux faisceaux de leurs anneaux locaux. Nous aurions pu l'appliquer à un complexe simplicial K , en remplaçant le faisceau \mathcal{O} par le faisceau constant $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$; à la place de \mathcal{W}_n , nous aurions obtenu le faisceau constant $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$. Ainsi, les groupes $H^q(X, \mathcal{W}_n)$ apparaissent comme les analogues des groupes de cohomologie de K mod p^n ; nous allons poursuivre cette analogie en définissant des "opérations de Bockstein" jouissant de propriétés semblables à celles du cas classique.

D'après la Proposition 1, (e), la suite exacte (1) donne naissance à une suite exacte de cohomologie, et, en particulier, à un opérateur de cobord

$$\delta_{n,m}^q : H^q(X, \mathcal{W}_{n-m}) \rightarrow H^{q+1}(X, \mathcal{W}_m), \quad n \geq m.$$

Le cobord $\delta_{n,m}^q$ sera appelé une *opération de Bockstein* en dimension q . Par définition, on a donc la suite exacte:

$$\cdots \rightarrow H^q(X, \mathcal{W}_m) \xrightarrow{V^{n-m}} H^q(X, \mathcal{W}_n) \xrightarrow{R^m} H^q(X, \mathcal{W}_{n-m}) \xrightarrow{\delta_{n,m}^q} H^{q+1}(X, \mathcal{W}_m) \rightarrow \cdots$$

Les opérations de Bockstein sont semi-linéaires (de façon précise, $\delta_{n,m}^q$ est p^{n-m} -linéaire) et commutent avec F' ; elles vérifient avec V et R des relations de commutation que nous laissons au lecteur le soin d'expliciter.

Lorsque $n \geq 2m$, l'idéal $V^{n-m}(\mathcal{W}_m)$ de \mathcal{W}_n est un idéal *de carré nul*; cela permet de calculer l'effet de $\delta_{n,m}^q$ sur un cup-produit. On trouve:

$$(5) \quad \delta_{n,m}^q(x \cdot y) = \delta_{n,m}^r(x) \cdot F^{n-m} R^{n-2m} y + (-1)^r F^{n-m} R^{n-2m} x \cdot \delta_{n,m}^s(y),$$

où $x \in H^r(X, \mathcal{W}_{n-m})$ et $y \in H^s(X, \mathcal{W}_{n-m})$, avec $r + s = q$.

Par analogie avec le cas classique, nous dirons que X n'a pas de torsion (homologique) en dimension q si les $\delta_{n,m}^q$ sont nuls pour tous les couples (n,m) , avec $n \geq m$. En vertu de la suite exacte écrite plus haut, cela signifie que les homomorphismes

$$R^m : H^q(X, \mathcal{W}_n) \rightarrow H^q(X, \mathcal{W}_{n-m})$$

sont surjectifs; on vérifie d'ailleurs facilement qu'il suffit que les homomorphismes $H^q(X, \mathcal{W}_n) \rightarrow H^q(X, \mathcal{O})$ le soient.

EXEMPLES. Une variété algébrique X de dimension r n'a de torsion ni en dimension r (puisque $H^{r+1}(X, \mathcal{W}_m) = 0$ d'après la Proposition 1), ni en dimension 0 (car toute section f du faisceau \mathcal{O} se remonte en une section $(f, 0, \dots, 0)$ du faisceau \mathcal{W}_n). Ainsi, une *courbe algébrique* est sans torsion. Par contre, les surfaces construites par Igusa dans [6] ont de la torsion en dimension 1; nous verrons au n° 20 un exemple analogue.

Les opérations β_n .

A côté des opérations de Bockstein que nous venons de définir, et qui opèrent sur les divers groupes $H^q(X, \mathcal{W}_n)$, il y a intérêt à introduire des opérations β_n , non partout définies, opérant sur

$$H^*(X, \mathcal{O}) = \sum_{q=0}^{q=\infty} H^q(X, \mathcal{O}).$$

La première de ces opérations

$$\beta_1^q : H^q(X, \mathcal{O}) \rightarrow H^{q+1}(X, \mathcal{O})$$

n'est autre que l'opération de Bockstein $\delta_{2,1}^q$ associée à la suite exacte:

$$0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{W}_2 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow 0.$$

On a $\beta_1^q \circ \beta_1^{q-1} = 0$, ce qui permet de poser $H^q(X, \mathcal{O})_2 = \text{Ker}(\beta_1^q) / \text{Im}(\beta_1^{q-1})$; l'opération β_2^q appliquera alors $H^q(X, \mathcal{O})_2$ dans $H^{q+1}(X, \mathcal{O})_2$, et ainsi de suite.

De façon précise, posons:

$$(6) \quad Z_n^q = \begin{cases} \text{Im} [H^q(X, \mathcal{W}_n) \xrightarrow{R^{n-1}} H^q(X, \mathcal{O})] \\ \text{Ker} [H^q(X, \mathcal{O}) \xrightarrow{\delta_{n,n-1}^q} H^{q+1}(X, \mathcal{W}_{n-1})] \end{cases}$$

et

$$(7) \quad B_n^q = \begin{cases} \text{Ker} [H^q(X, \mathcal{O}) \xrightarrow{V^{n-1}} H^q(X, \mathcal{W}_n)] \\ \text{Im} [H^{q-1}(X, \mathcal{W}_{n-1}) \xrightarrow{\delta_{n,1}^{q-1}} H^q(X, \mathcal{O})]. \end{cases}$$

Les Z_n^a (resp. les B_n^a) vont en décroissant (resp. en croissant) avec l'entier n , et les Z_n^a contiennent les B_n^a ; pour $n = 1$, on a $B_1^a = 0$ et $Z_1^a = H^a(X, \mathcal{O})$; pour $n = 2$, on a $B_2^a = \text{Im}(\beta_1^{a-1})$ et $Z_2^a = \text{Ker}(\beta_1^a)$, de telle sorte que $Z_2^a/B_2^a = H^a(X, \mathcal{O})_2$. De façon générale, on posera $H^a(X, \mathcal{O})_n = Z_n^a/B_n^a$; si $x \in Z_n^a$, choisissons un $y \in H^a(X, \mathcal{W}_n)$ tel que $R^{n-1}y = x$, et posons $z = \delta_{n+1,1}^a(y)$, qui est un élément de $H^{a+1}(X, \mathcal{O})$; on vérifie tout de suite que l'application $x \rightarrow z$ définit par passage au quotient un homomorphisme

$$\beta_n^a : H^a(X, \mathcal{O})_n \rightarrow H^{a+1}(X, \mathcal{O})_n,$$

et que l'on a $\text{Ker}(\beta_n^a) = Z_{n+1}^a/B_n^a$ et $\text{Im}(\beta_n^{a-1}) = B_{n+1}^a/B_n^a$. Les β_n^a sont les opérations cherchées. Pour qu'elles soient identiquement nulles, il faut et il suffit que X n'ait pas de torsion: cela résulte immédiatement de l'expression (6). On notera la formule suivante, conséquence de la formule (5):

$$(8) \quad \beta_n(x \cdot y) = \beta_n(x) \cdot F^n(y) + (-1)^{\deg(x)} F^n(x) \cdot \beta_n(y).$$

En particulier, en prenant pour y un élément de degré 0, on voit que β_n est une opération p^n -linéaire.

REMARQUES. (1) Nous aurions également pu définir les β_n comme les différentielles successives de la suite spectrale définie par la filtration $\{V^k \mathcal{W}_{N-k}\}$ de \mathcal{W}_N (N étant pris suffisamment grand).

(2) Il y a tout lieu de penser que l'on peut définir des puissances réduites de Steenrod dans $H^*(X, \mathcal{O})$ et que β_1 coïncide avec l'une de ces puissances. En tout cas, lorsque $p = 2$, un calcul direct montre que l'opération

$$\beta_1^1 : H^1(X, \mathcal{O}) \rightarrow H^2(X, \mathcal{O})$$

coïncide bien avec le cup-carré.

4. Un lemme sur les limites projectives

Nous aurons besoin au n° 5 du résultat suivant (bien connu dans le cas des espaces vectoriels):

LEMME 1. *La limite projective d'une suite exacte de modules de longueur finie est une suite exacte.*

Rappelons brièvement la démonstration. Soit I un ensemble ordonné filtrant pour une relation d'ordre notée \geq , et soient (A_i, f_{ij}) , (A'_i, f'_{ij}) et (A''_i, f''_{ij}) trois systèmes projectifs, indexés par I , formés de modules de longueur finie sur un anneau Λ ; supposons donnée, pour tout $i \in I$, une suite exacte:

$$A_i \xrightarrow{g_i} A'_i \xrightarrow{h_i} A''_i$$

avec $f'_{ij}g_i = g_jf_{ij}$, $f''_{ij}h_i = h_jf''_{ij}$ si $i \geq j$ (les applications f_{ij}, \dots, h_i étant semi-linéaires). Dans ces conditions, il nous faut démontrer que la suite:

$$\lim(A_i, f_{ij}) \xrightarrow{g} \lim(A'_i, f'_{ij}) \xrightarrow{h} \lim(A''_i, f''_{ij})$$

est une suite exacte.

Soit donc $(a'_i) \in \lim(A'_i, f'_{ij})$ un élément du noyau de h ; cela signifie que $h_i(a'_i) = 0$ pour tout $i \in I$, et si l'on pose $B_i = g_i^{-1}(a'_i)$, les B_i sont des sous-modules affines non vides des A_i , avec $f_{ij}(B_i) \subset B_j$. Soit \mathfrak{S} l'ensemble des systèmes $\{C_i\}$ où les C_i sont des sous-modules affines non vides des B_i , vérifiant $f_{ij}(C_i) \subset C_j$. L'ensemble \mathfrak{S} , ordonné par inclusion descendante, est un ensemble inductif; cela résulte immédiatement du fait que les sous-modules affines d'un module de longueur finie vérifient la condition minimale. D'après le théorème de Zorn, \mathfrak{S} possède un élément minimal, soit $\{C_i\}$. Si $i_0 \in I$, les $f_{i_0 i}(C_i)$, $i \geq i_0$, sont des sous-modules affines de C_{i_0} , d'intersections finies non vides; en appliquant à nouveau la condition minimale aux sous-modules affines de A_i , on voit que l'intersection des $f_{i_0 i}(C_i)$ est non vide; soit a_{i_0} un élément de cette intersection. Posons maintenant $C'_i = f_{i_0 i}^{-1}(a_{i_0}) \cap C_i$ si $i \geq i_0$, et $C'_i = C_i$ sinon. On a $\{C'_i\} \in \mathfrak{S}$, comme on le voit tout de suite, d'où $C'_i = C_i$ en vertu du caractère minimal de $\{C_i\}$. En particulier, on a $C'_{i_0} = C_{i_0}$, ce qui signifie que C_{i_0} est réduit à $\{a_{i_0}\}$. Ceci s'applique à tout indice $i \in I$, et montre que $C_i = \{a_i\}$; on a $f_{ij}(a_i) = a_j$, et $g_i(a_i) = a'_i$, ce qui montre bien que $\{a_i\}$ est un élément de $\lim(A_i, f_{ij})$ ayant $\{a'_i\}$ pour image, cqfd.

5. Cas des variétés projectives

Nous supposons à partir de maintenant que X est une *variété projective*. Les $H^q(X, \mathcal{O})$ sont alors des k -espaces vectoriels de dimension finie, ce qui entraîne diverses simplifications; par exemple, les Z_n^q et les B_n^q définis au n° 3 forment des suites stationnaires, et les homomorphismes β_n^q sont nuls pour n assez grand: nous noterons Z_∞^q (resp. B_∞^q) la valeur limite de Z_n^q (resp. de B_n^q) pour $n \rightarrow +\infty$.

Pour tout entier $q \geq 0$, les Λ -modules $H^q(X, \mathcal{W}_n)$ et les homomorphismes $R^{n-m} : H^q(X, \mathcal{W}_n) \rightarrow H^q(X, \mathcal{W}_{n-m})$ forment un *système projectif*. La limite projective de ce système sera notée $H^q(X, \mathcal{W})$, ou simplement H^q ; c'est l'analogue, dans le cas classique, de la cohomologie à coefficients entiers p -adiques; on notera toutefois que nous n'avons pas défini les H^q comme des groupes de cohomologie de X à valeurs dans un certain faisceau, mais simplement comme des limites projectives de tels groupes.

Les H^q sont des Λ -modules, de façon évidente; de plus, ils peuvent être munis, par passage à la limite, des opérations V et F ; comme d'ordinaire, V est p^{-1} -linéaire, F est p -linéaire, et l'on a $VF = FV = p$. Du fait que les $H^q(X, \mathcal{W}_n)$ sont des Λ -modules de longueur finie, on peut appliquer le Lemme 1 aux suites exactes:

$$\dots \rightarrow H^q(X, \mathcal{W}_N) \xrightarrow{V^n} H^q(X, \mathcal{W}_{N+n}) \rightarrow H^q(X, \mathcal{W}_n) \rightarrow \dots,$$

et l'on obtient les suites exactes:

$$(9) \quad \dots \rightarrow H^q \xrightarrow{V^n} H^q \rightarrow H^q(X, \mathcal{W}_n) \xrightarrow{\delta_n^q} H^{q+1} \rightarrow \dots$$

Pour $n = 1$, l'image de H^q dans $H^q(X, \mathcal{O})$ n'est autre que Z_∞^q : cela résulte du Lemme 1. Ainsi, *pour que X n'ait pas de torsion en dimension q , il faut et il suffit que δ_1^q soit nul*, et les autres δ_n^q sont alors automatiquement nuls.

Pour n quelconque, la suite exacte (9) montre que l'image de H^q dans $H^q(X, \mathcal{W}_n)$

s'identifie à $H^q/V^n H^q$; il en résulte que H^q est limite projective des $H^q/V^n H^q$, ce qui signifie:

(a) que $\cap V^n H^q = 0$,

(b) que H^q est complet pour la topologie définie par les sous-groupes $V^n H^q$.

Posons $T_n^q = \text{Ker}(V^n : H^q \rightarrow H^q)$; d'après (9), c'est aussi l'image de l'homomorphisme δ_n^{q-1} , ce qui montre que c'est un sous-module de longueur finie de H^q . On a évidemment $T_n^q \subset T_{n+1}^q$, et les suites exactes:

$$(10) \quad \begin{array}{ccc} & H^{q-1}(X, \mathcal{W}_n) & \\ & \downarrow V & \\ H^{q-1} \rightarrow & H^{q-1}(X, \mathcal{W}_{n+1}) & \xrightarrow{\delta_{n+1}^{q-1}} H^q \\ & \downarrow R^n & \\ & H^{q-1}(X, \mathcal{O}) & \end{array}$$

montrent que T_{n+1}^q/T_n^q est isomorphe à $Z_{n+1}^{q-1}/Z_\infty^{q-1}$. Il en résulte que la suite des T_n^q est stationnaire; nous désignerons par T^q sa limite, et nous l'appellerons la *composante de torsion* de H^q ; la relation $T^q = 0$ signifie, en vertu de ce qui précède, que X n'a pas de torsion en dimension $q - 1$. Il est facile de calculer la longueur $l(T^q)$ du Λ -module T^q ; on trouve:

$$(11) \quad l(T^q) = \sum_{n=1}^{\infty} l(Z_n^{q-1}/Z_\infty^{q-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot l(\text{Im}(\beta_n^{q-1})).$$

REMARQUE. Jusqu'à présent, les Λ -modules H^q se comportent exactement comme les groupes de cohomologie d'un complexe fini K à coefficients dans Z_p , les T^q jouant le rôle des composantes de torsion. Mais, alors qu'il est évident que les $H^q(K, Z_p)$ sont des Z_p -modules de type fini (i.e. engendrés par un nombre fini d'éléments), il n'est nullement évident que les H^q soient des Λ -modules de type fini. En fait, c'est le cas pour H^0 qui est isomorphe à Λ^r (r désignant le nombre de composantes connexes de X), et c'est aussi le cas pour H^1 si X est normale (cf. Proposition 4); par contre, ce n'est pas le cas pour le groupe H^1 d'une courbe de genre 0 ayant un point de rebroussement ordinaire (cf. n° 6). De façon générale, je conjecture que tous les H^q d'une variété projective non singulière sont des Λ -modules de type fini.

PROPOSITION 2. *Supposons que H^q soit un Λ -module de type fini. Alors son module de torsion est T^q et, si l'on pose $L^q = H^q/T^q$, le Λ -module L^q est un Λ -module libre, de rang égal à $l(L^q/VL^q) + l(L^q/FL^q)$.*

Tout d'abord, on sait qu'il existe un entier n tel que $T^q = T_n^q$, d'où le fait que V^n est identiquement nul sur T^q ; comme $p = FV$, on en conclut que tout élément de T^q est annulé par p^n , ce qui montre que T^q est contenu dans le sous-module de torsion T' de H^q . Soit maintenant $V' : T'/T^q \rightarrow T'/T^q$ l'application déduite de V par passage au quotient; vu la définition de T^q , l'application V' est injective; mais, puisque H^q est supposé être un module de type fini sur l'anneau principal Λ ,

le module T' est un module de longueur finie, et l'application V' est alors bijective. D'où:

$$T' = VT' + T^a,$$

et, en appliquant V^n ,

$$V^n T' = V^{n+1} T' = \dots$$

Puisque $\bigcap V^n H^a = 0$, on en déduit $V^n T' = 0$, d'où $T' \subset T^a$ et $T' = T^a$, ce qui démontre la première partie de la proposition.

Il est alors évident que $L^a = H^a/T^a$ est un Λ -module libre, de rang égal à la dimension du k -espace vectoriel $L^a/pL^a = L^a/FVL^a$. On a:

$$\dim_k(L^a/FVL^a) = l(L^a/VL^a) + l(VL^a/FVL^a) = l(L^a/VL^a) + l(L^a/FL^a),$$

puisque V est un semi-isomorphisme de L^a sur VL^a ; ceci achève de démontrer la proposition.

COROLLAIRE. *Si H^1 est un module de type fini, c'est un module libre.*

En effet, T^1 est réduit à 0, puisqu'une variété n'a pas de torsion en dimension 0.

La Proposition 2 montre que, si H^a est un Λ -module de type fini, L^a/FL^a est un module de longueur finie, et il en est de même de H^a/FH^a , puisque H^a ne diffère de L^a que par le module de longueur finie T^a . Inversement:

PROPOSITION 3. *Si H^a/FH^a est un module de longueur finie, alors H^a est un module de type fini.*

L'hypothèse entraîne que $l(VH^a/VFH^a) < +\infty$, d'où:

$$l(H^a/pH^a) = l(H^a/VFH^a) < +\infty.$$

Il est donc possible de choisir dans H^a des éléments x_1, \dots, x_k en nombre fini, dont les images dans H^a/pH^a engendrent ce module; si H' désigne le module engendré par les x_i dans H^a , on a donc:

$$(12) \quad H^a = pH^a + H'.$$

Prouvons que $H' = H^a$. Montrons d'abord que H' est dense dans H^a , muni de la topologie définie par les $V^n H^a$. Posons $M_n = H^a/(H' + V^n H^a)$; la relation (12) montre que $M_n = p \cdot M_n$, et, comme M_n est un module de longueur finie (puisque quotient de $H^a/V^n H^a$), ceci entraîne $M_n = 0$, d'où $H^a = H' + V^n H^a$ pour tout n , ce qui signifie bien que H' est dense dans H^a . Montrons maintenant que H' est complet pour la topologie induite par celle de H^a , ce qui entraînera qu'il est fermé, donc égal à H^a . Posons $H'_n = H' \cap V^n H^a$; les H'_n sont des sous-modules de H' formant une base de voisinages de 0 pour la topologie induite sur H' par H^a ; on a $\bigcap H'_n = 0$ et les quotients H'/H'_n sont de longueur finie; comme H' est un module de type fini sur l'anneau local complet Λ , il en résulte que la topologie définie par les H'_n est identique à la topologie p -adique de H' , définie par les sous-modules $p^k H'$ (cf. [11], p. 9, prop. 2, qui s'étend immédiatement aux modules de type fini sur un anneau semi-local complet); comme H' est complet pour la topologie p -adique, ceci achève la démonstration.

COROLLAIRE 1. *Pour que tous les H^q , $q \geq 0$, soient des modules de type fini, il faut et il suffit que les limites projectives des modules $H^q(X, \mathcal{W}_n | F\mathcal{W}_n)$ soient des modules de longueur finie.*

Soit $S^q = \lim H^q(X, \mathcal{W}_n | F\mathcal{W}_n)$. Par passage à la limite à partir des suites exactes:

$$(13) \quad \cdots \rightarrow H^q(X, \mathcal{W}_n) \xrightarrow{F} H^q(X, \mathcal{W}_n) \rightarrow H^q(X, \mathcal{W}_n | F\mathcal{W}_n) \rightarrow H^{q+1}(X, \mathcal{W}_n) \rightarrow \cdots$$

on obtient la suite exacte:

$$(14) \quad \cdots \rightarrow H^q \xrightarrow{F} H^q \rightarrow S^q \rightarrow H^{q+1} \rightarrow \cdots$$

Si les H^q sont des modules de type fini, on a vu que le conoyau de F est un module de longueur finie, donc aussi son noyau; la suite exacte (14) montre alors bien que S^q est de longueur finie. Inversement, si S^q est de longueur finie, il en est de même du conoyau de F , et l'on peut appliquer la Proposition 3.

(Il est facile de voir que les $H^q(X, \mathcal{W}_n | F\mathcal{W}_n)$ et les S^q sont des Λ -modules annihilés par p , autrement dit sont des espaces vectoriels sur k .)

COROLLAIRE 2. *Soit q un entier ≥ 0 ; supposons que X n'ait de torsion ni en dimension $q - 1$ ni en dimension q , et que l'homomorphisme*

$$F : H^q(X, \mathcal{O}) \rightarrow H^q(X, \mathcal{O})$$

soit surjectif. Alors H^q est un Λ -module libre de rang égal à $\dim H^q(X, \mathcal{O})$.

Puisque X n'a pas de torsion en dimension q , on a $Z_\infty^q = H^q(X, \mathcal{O})$ et l'hypothèse faite sur F signifie que $F : H^q/VH^q \rightarrow H^q/VH^q$ est surjectif. On en déduit aussitôt, par récurrence sur n , qu'il en est de même de $F : H^q/V^nH^q \rightarrow H^q/V^nH^q$, et, en appliquant le Lemme 1, on voit que $FH^q = H^q$. Comme X n'a pas de torsion en dimension $q - 1$, on a $T^q = 0$ et $H^q = L^q$. Le corollaire s'ensuit, en appliquant les Propositions 2 et 3.

(Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer un résultat plus général, sous la seule hypothèse que $F : Z_\infty^q \rightarrow Z_\infty^q$ soit surjectif.)

6. Un contre-exemple

Soit X une courbe de genre zéro, présentant un point de rebroussement ordinaire P ; nous allons voir que $H^1(X, \mathcal{W})$ n'est pas un Λ -module de type fini.

Si X' désigne la courbe déduite de X par normalisation, l'application canonique $X' \rightarrow X$ est un homéomorphisme, ce qui nous permet d'identifier les espaces topologiques X et X' . Si \mathcal{O} et \mathcal{O}' désignent respectivement les faisceaux des anneaux locaux de X et de X' , on a $\mathcal{O}_x \subset \mathcal{O}'_x$ et $\mathcal{O}_x = \mathcal{O}'_x$ pour $x \neq P$; quant à \mathcal{O}_P , c'est le sous-anneau de \mathcal{O}'_P formé des fonctions f dont la différentielle df s'annule en P (une telle fonction s'écrit donc

$$f = a_0 + a_2t^2 + a_3t^3 + \cdots;$$

c'est la définition même d'un point de rebroussement ordinaire).

On obtient ainsi une suite exacte:

$$(15) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}' \rightarrow \mathcal{Q} \rightarrow 0,$$

où \mathcal{Q} est un faisceau concentré en P , et tel que $\mathcal{Q}_P = k$. D'où une suite exacte de cohomologie:

$$(16) \quad 0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{Q}) \xrightarrow{\delta} H^1(X, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}').$$

On a $H^0(X, \mathcal{Q}) = \mathcal{Q}_P = k$, et $H^1(X, \mathcal{O}') = H^1(X', \mathcal{O}') = 0$ (puisque X' est une courbe non singulière de genre 0). Il en résulte que $\dim H^1(X, \mathcal{O}) = 1$, d'où, par récurrence sur n , $l(H^1(X, \mathcal{W}_n)) = n$; on a d'ailleurs, pour tout entier n , une suite exacte analogue à (15):

$$(17) \quad 0 \rightarrow \mathcal{W}_n \rightarrow \mathcal{W}'_n \rightarrow \mathcal{Q}_n \rightarrow 0,$$

et l'homomorphisme cobord $\delta : H^0(X, \mathcal{Q}_n) \rightarrow H^1(X, \mathcal{W}'_n)$ est bijectif. L'opération $F : \mathcal{W}'_n \rightarrow \mathcal{W}'_n$ applique évidemment \mathcal{W}'_n dans lui-même, donc définit un homomorphisme de la suite exacte (17) dans elle-même; de plus, si $f \in \mathcal{O}'_P$, la fonction $Ff = f^p$ a une différentielle identiquement nulle, donc appartient à \mathcal{O}_P ; ainsi, F applique le faisceau \mathcal{W}'_n dans \mathcal{W}_n , et le faisceau quotient \mathcal{Q}_n dans 0. Si l'on considère alors le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} H^0(X, \mathcal{Q}_n) & \xrightarrow{\delta} & H^1(X, \mathcal{W}'_n) \\ F \downarrow & & F \downarrow \\ H^0(X, \mathcal{Q}_n) & \xrightarrow{\delta} & H^1(X, \mathcal{W}_n), \end{array}$$

on voit que $F : H^1(X, \mathcal{W}'_n) \rightarrow H^1(X, \mathcal{W}_n)$ est identiquement nul. Il s'ensuit que p annule $H^1(X, \mathcal{W}_n)$ qui est donc un *espace vectoriel sur k* , de dimension égale à n , d'après ce qui a été dit plus haut. Quant à H^1 , limite projective des $H^1(X, \mathcal{W}_n)$, c'est un *espace vectoriel sur k de dimension infinie* (il est topologiquement isomorphe à l'espace produit $k^{\mathbb{N}}$, \mathbb{N} désignant l'ensemble des entiers ≥ 0); ce n'est donc pas un Λ -module de type fini.

REMARQUE. La suite exacte (15) s'applique plus généralement à toute courbe X et à sa normalisée X' ; la suite exacte (16) montre alors que $\dim H^1(X, \mathcal{O})$ n'est pas autre chose que le "genre" π de X , au sens défini par Rosenlicht dans [9]; en appliquant [14], n° 80, on voit donc que *le genre arithmétique de la courbe (à singularités) X est égal à $1 - \pi$* , si X est connexe.

7. Le premier groupe de cohomologie d'une variété projective normale

Soit tout d'abord A un anneau commutatif quelconque, et soit

$$\alpha = (a_0, \dots, a_{n-1})$$

un élément de $W_n(A)$. Nous associerons à α la forme différentielle de degré 1 donnée par la formule suivante:

$$(18) \quad D_n(\alpha) = da_{n-1} + a_{n-2}^{p-1} da_{n-2} + \dots + a_0^{p^{n-1}-1} da_0.$$

Lorsque A est un anneau de caractéristique 0, les composantes $a^{(0)}, a^{(1)}, \dots, a^{(n-1)}$ de α sont définies (cf. [21], §1), et l'on a évidemment:

$$(19) \quad D_n(\alpha) = \frac{1}{p^{n-1}} da^{(n-1)}.$$

De la formule (19) on déduit aussitôt:

$$(20) \quad D_n(\alpha + \beta) = D_n(\alpha) + D_n(\beta)$$

et

$$(21) \quad D_n(\alpha \cdot \beta) \equiv D_n(\alpha) \cdot b_0^{p^{n-1}} + a_0^{p^{n-1}} \cdot D_n(\beta) \pmod{p}.$$

En vertu du principe de prolongement des identités, la formule (20) reste valable lorsque A est un anneau de caractéristique p , alors que la formule (21) est remplacée par la suivante:

$$(22) \quad D_n(\alpha \cdot \beta) = D_n(\alpha) \cdot F^{n-1}R^{n-1}\beta + F^{n-1}R^{n-1}\alpha \cdot D_n(\beta).$$

Ceci s'applique notamment à l'anneau local $A = \mathcal{O}_x$ d'un point x sur une variété normale X , et l'on obtient ainsi un homomorphisme

$$D_n : W_n(\mathcal{O}_x) \rightarrow \Omega_x^1,$$

en désignant par Ω_x^1 le \mathcal{O}_x -module des germes de formes différentielles de degré 1 sur X qui n'ont pas de pôle en x (i.e. dont le diviseur polaire ne passe pas par x).

Si l'on a $\alpha \in FW_n(\mathcal{O}_x)$, c'est-à-dire si les a_0, \dots, a_{n-1} sont des puissances p -èmes, on a évidemment $D_n(\alpha) = 0$; inversement, il est classique que la relation $D_1(a) = da = 0$ entraîne que a est une puissance p -ème dans le corps $k(X)$ des fonctions rationnelles sur X ; plus généralement, il n'est pas difficile de montrer (par exemple en utilisant l'opération \mathcal{C} de Cartier, cf. n° 10) que la relation $D_n(\alpha) = 0$ entraîne que chacun des a_i est une puissance p -ème b_i^p , avec $b_i \in k(X)$; mais la relation $b_i^p = a_i$ montre que b_i est entier sur \mathcal{O}_x , donc appartient à \mathcal{O}_x , vu l'hypothèse de normalité faite sur X . Ainsi, le noyau de D_n est exactement $FW_n(\mathcal{O}_x)$ et, en passant aux faisceaux, on obtient:

LEMME 2. *L'application D_n définit par passage au quotient une injection du faisceau $\mathcal{W}_n/F\mathcal{W}_n$ dans le faisceau Ω^1 des germes de formes différentielles dépourvues de pôles.*

Supposons maintenant que X soit une variété projective et normale. D'après le Lemme 2, $H^0(X, \mathcal{W}_n/F\mathcal{W}_n)$ est un sous-espace vectoriel de $H^0(X, \Omega^1)$, qui est un espace vectoriel de dimension finie (Ω^1 étant un faisceau algébrique cohérent); on en déduit que $\dim H^0(X, \mathcal{W}_n/F\mathcal{W}_n)$ est bornée pour $n \rightarrow +\infty$; soit ν cette borne, et posons:

$$g = \dim Z_\infty^1 = \dim [\text{Im} : H^1 \rightarrow H^1(X, \mathcal{O})].$$

PROPOSITION 4. *Les hypothèses et notations étant comme ci-dessus, le Λ -module $H^1 = H^1(X, \mathcal{W})$ est un module libre de rang $\leq g + \nu$, l'égalité ayant lieu si X n'a pas de torsion en dimension 1.*

Les $H^0(X, \mathcal{W}_n/F\mathcal{W}_n)$ forment une suite croissante de sous-espaces de $H^0(X, \Omega^1)$, et il existe donc un entier m tel que l'on ait $\dim H^0(X, \mathcal{W}_n/F\mathcal{W}_n) = \nu$ pour $n \geq m$. De la suite exacte de faisceaux:

$$0 \rightarrow \mathcal{W}_n \xrightarrow{F} \mathcal{W}_n \rightarrow \mathcal{W}_n/F\mathcal{W}_n \rightarrow 0,$$

on déduit la suite exacte suivante (qui n'est qu'un cas particulier de (13)):

$$0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{W}_n/F\mathcal{W}_n) \rightarrow H^1(X, \mathcal{W}_n) \xrightarrow{F} H^1(X, \mathcal{W}_n).$$

Comme $H^1(X, \mathcal{W}_n)$ est un Λ -module de longueur finie, on tire de là:

$$(23) \quad l(H^1(X, \mathcal{W}_n)/FH^1(X, \mathcal{W}_n)) = \nu \quad \text{pour } n \geq m.$$

Puisque H^1/FH^1 est limite projective des $H^1(X, \mathcal{W}_n)/FH^1(X, \mathcal{W}_n)$, on a aussi $l(H^1/FH^1) \leq \nu$, ce qui, d'après la Proposition 3, entraîne que H^1 est un Λ -module de type fini. De plus, on sait que $T^1 = 0$, d'où $L^1 = H^1$, avec les notations du n° 5, et $H^1/VH^1 = Z_\infty^1$; en appliquant la Proposition 2, on en déduit que H^1 est un Λ -module libre de rang égal à $\dim Z_\infty^1 + l(H^1/FH^1) \leq g + \nu$, ce qui démontre la première partie de la proposition.

Supposons maintenant X sans torsion en dimension 1. Les homomorphismes

$$R : H^1(X, \mathcal{W}_{n+1}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{W}_n)$$

sont surjectifs, donc aussi les homomorphismes obtenus par passage au quotient

$$R : H^1(X, \mathcal{W}_{n+1})/FH^1(X, \mathcal{W}_{n+1}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{W}_n)/FH^1(X, \mathcal{W}_n).$$

Mais, si $n \geq m$, ces deux modules ont même longueur ν , et il s'ensuit que R est bijectif; en passant à la limite, il en est donc de même de l'homomorphisme $H^1/FH^1 \rightarrow H^1(X, \mathcal{W}_n)/FH^1(X, \mathcal{W}_n)$, et l'on a $l(H^1/FH^1) = \nu$; en appliquant à nouveau la Proposition 2 on en conclut bien que le rang de H^1 est égal à $g + \nu$, *cqfd*.

REMARQUES. (1) Même lorsque X a de la torsion en dimension 1, on peut calculer le rang de H^1 . On trouve: $\text{rg}(H^1) = g + \nu - l(T^2/FT^2)$.

(2) La Proposition 4 est encore valable si l'on ne suppose plus que X est normale mais seulement que les relations $a \in k(X)$, $\alpha^p \in \mathcal{O}_x$ entraînent $a \in \mathcal{O}_x$; cela suffit en effet à assurer que $\mathcal{W}_n/F\mathcal{W}_n$ est un sous-faisceau de Ω^1 .

§2. CAS DES COURBES ALGÈBRIQUES

Dans tout ce §4, X désignera une *courbe algébrique irréductible, complète* (donc projective), *sans singularités*, définie sur le corps algébriquement clos k , de caractéristique $p > 0$.

8. Rappel

Montrons d'abord comment les groupes de cohomologie $H^1(X, \mathcal{O})$ et $H^1(X, \Omega^1)$ s'interprètent en termes classiques (cf. [I]):

Soit $K = k(X)$ le corps des fonctions rationnelles sur X ; nous considérerons

K comme un faisceau constant sur X (cf. [14], n° 36), contenant \mathcal{O} comme sous-faisceau. On a donc la suite exacte:

$$(24) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow K \rightarrow K/\mathcal{O} \rightarrow 0.$$

Puisque K est un faisceau constant, et que X est irréductible, on a $H^1(X, K) = 0$; la suite exacte de cohomologie associée à (24) donne donc naissance à la suite exacte:

$$(25) \quad K \rightarrow H^0(X, K/\mathcal{O}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}) \rightarrow 0.$$

Cette dernière suite exacte est facile à interpréter. Soit R l'algèbre des *répartitions* sur X (cf. [1], p. 25); rappelons qu'un élément $r \in R$ est une famille $\{r_x\}_{x \in X}$ où les r_x sont des éléments de K appartenant à \mathcal{O}_x pour presque tout x (i.e. sauf pour un nombre fini). Les répartitions $r = \{r_x\}$ telles que $r_x \in \mathcal{O}_x$ pour tout x forment un sous-anneau $R(0)$ de R ; celles qui sont telles que tous les r_x soient égaux à un même élément de K forment un sous-anneau de R que l'on peut identifier à K . On voit tout de suite que $R/R(0)$ est canoniquement isomorphe à $H^0(X, K/\mathcal{O})$, et la suite exacte (25) donne donc en définitive un isomorphisme:

$$(26) \quad R/(R(0) + K) \approx H^1(X, \mathcal{O}).$$

Nous identifierons en général $H^1(X, \mathcal{O})$ et $R/(R(0) + K)$ au moyen de l'isomorphisme précédent. On sait ([1], chaps. II et VI) que l'espace vectoriel $R/(R(0) + K)$ est dual de l'espace $H^0(X, \Omega^1)$ des formes différentielles de 1ère espèce, la dualité se faisant au moyen de la forme bilinéaire:

$$(27) \quad \langle r, \omega \rangle = \sum_{x \in X} \text{res}_x(r_x \omega).$$

En particulier, on a $\dim H^1(X, \mathcal{O}) = g$, *genre* de la courbe X .

La forme bilinéaire (27) peut aussi être considérée comme le cup-produit de $r \in H^1(X, \mathcal{O})$ et de $\omega \in H^0(X, \Omega^1)$, à valeurs dans $H^1(X, \Omega^1)$ qui est canoniquement isomorphe à k (ce dernier isomorphisme s'obtient de la façon suivante: à une classe de cohomologie on associe, comme dans (26), une classe de "répartition-différentielles" $\{\omega_x\}_{x \in X}$ et, à une telle répartition, on fait correspondre l'élément $\sum_{x \in X} \text{res}(\omega_x)$ qui appartient à k). C'est là un cas particulier du "théorème de dualité", dont on trouvera l'énoncé général dans [13], th. 4.

REMARQUE. Une formule analogue à (26) vaut pour $H^1(X, \mathcal{W}_n)$, ainsi que pour $H^1(X, \mathcal{L}(D))$, D désignant un diviseur de X .

9. La matrice de Hasse-Witt

Nous allons chercher la matrice de l'opération semi-linéaire

$$F : H^1(X, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O})$$

par rapport à une base convenable de $H^1(X, \mathcal{O})$.

Remarquons d'abord que l'identification (26) transforme F en l'élévation à la puissance p -ème dans R . D'autre part, en utilisant la dualité entre $R/(R(0) + K)$

et $H^0(X, \Omega^1)$, on voit qu'il existe g points P_1, \dots, P_g appartenant à X tels que, si t_1, \dots, t_g sont des paramètres uniformisants en ces points, les répartitions:

$$r_i = \{r_{i,x}\} \quad \text{où} \quad r_{i,x} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq P_i \\ 1/t_i & \text{si } x = P_i \end{cases}, \quad 1 \leq i \leq g,$$

forment une base du k -espace vectoriel $R/(R(0) + K)$. (Un tel système de g points est parfois appelé "non-spécial", cf. [1], p. 129.)

Soit $A = (a_{ij})$ la matrice de F par rapport à la base des r_i . Par définition, on a donc:

$$r_i^p \equiv \sum_{j=1}^{j=g} a_{ij} r_j \pmod{(R(0) + K)}, \quad 1 \leq i \leq g.$$

Ces congruences signifient qu'il existe des fonctions $g_i \in K$ telles que:

$$g_i \equiv r_i^p - \sum_{j=1}^{j=g} a_{ij} r_j \pmod{R(0)}.$$

En d'autres termes, chaque g_i est régulière en dehors des points P_1, \dots, P_g et admet $\delta_{ij}/t_j^p - a_{ij}/t_j$ pour partie polaire au point P_j (δ_{ij} désignant comme à l'ordinaire le symbole de Kronecker). On reconnaît là la définition de la matrice de Hasse-Witt de X (cf. [5]). Nous avons donc démontré:

PROPOSITION 5. La matrice de $F : H^1(X, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O})$ par rapport à la base des r_i ($1 \leq i \leq g$) n'est autre que la matrice de Hasse-Witt de X .

Nous aurons besoin par la suite d'utiliser la réduction de Jordan de F (cf. [5] ainsi que [3], n° 10). Rappelons brièvement en quoi elle consiste:

De façon générale, soit F un endomorphisme p -linéaire d'un espace vectoriel V , de dimension finie, sur un corps algébriquement clos k de caractéristique p . L'espace V se décompose canoniquement en somme directe

$$(28) \quad V = V_s \oplus V_n,$$

où V_s et V_n sont stables par F , l'endomorphisme F étant nilpotent sur V_n et bijectif sur V_s ; les dimensions de V_s et V_n seront notées respectivement $\sigma(V)$ et $\nu(V)$. On montre en outre que V_s possède une base e_1, \dots, e_σ telle que $F(e_i) = e_i$ pour tout i ; les $v \in V$ tels que $F(v) = v$ sont les combinaisons linéaires à coefficients entiers mod p des e_i , et forment donc un groupe fini V^F d'ordre p^σ et de type (p, \dots, p) ; l'existence de la base e_i fournit également le résultat suivant, qui nous sera utile plus loin: l'application $1 - F : V \rightarrow V$ est surjective.

Soit V' l'espace vectoriel dual de V . Le transposé F' de F est un endomorphisme p^{-1} -linéaire de V' défini par la formule:

$$(29) \quad \langle Fv, v' \rangle = \langle v, F'v' \rangle^p \quad \text{pour } v \in V \text{ et } v' \in V'.$$

A la décomposition (28) correspond la décomposition duale:

$$(30) \quad V' = V'_s \oplus V'_n.$$

Si e'_i désigne la base de V'_s duale de e_i , on a encore $F'e'_i = e'_i$ pour $1 \leq i \leq \sigma$, et les $v' \in V'$ tels que $F'v' = v'$ sont les combinaisons linéaires à coefficients entiers des

e'_i ; ces v' forment donc un groupe *dual* du groupe V^F . (On observera que la décomposition (30) vaut pour *tout* endomorphisme p^{-1} -linéaire d'un k -espace vectoriel de dimension finie, puisqu'un tel endomorphisme peut toujours être considéré comme le transposé d'un endomorphisme p -linéaire.)

Ce qui précède s'applique notamment au cas où $V = H^1(X, \mathcal{O})$ et $V' = H^0(X, \Omega^1)$. On écrira alors simplement σ et ν à la place de $\sigma(V)$ et de $\nu(V)$; on a $g = \sigma + \nu$. Avec les notations de [5], l'entier σ n'est pas autre chose que le *rang* de la matrice $AA^p \dots A^{p^{\sigma-1}}$.

Le résultat suivant, dû à P. Cartier (non publié), sera démontré au n° 10:

PROPOSITION 6. *Pour tout entier $m \geq 1$, l'image de l'homomorphisme*

$$D_m : H^0(X, \mathcal{W}_m / F^m \mathcal{W}_m) \rightarrow H^0(X, \Omega^1) \quad (\text{cf. n}^\circ 7)$$

est égale au noyau de la m -ème itérée F'^m de F' .

(Pour $m = 1$, ce résultat est facile à démontrer directement, et était d'ailleurs déjà connu, cf. [12], n° 6).

Il résulte de la prop. 6 que, pour m assez grand, l'image de D_m est égale à la "composante nilpotente" $H^0(X, \Omega^1)_n$ de $H^0(X, \Omega^1)$ et a donc pour dimension ν . Ainsi, l'entier ν défini ci-dessus *coïncide* avec celui défini au n° 7 comme $\text{Sup. dim } H^0(X, \mathcal{W}_m / F^m \mathcal{W}_m)$; en appliquant la Proposition 4, et tenant compte du fait qu'une courbe n'a pas de torsion, on obtient finalement:

PROPOSITION 7. *Le Λ -module $H^1(X, \mathcal{W})$ est un module libre de rang égal à $g + \nu = 2g - \sigma$.*

En particulier, ce rang *ne dépend que de la matrice de Hasse-Witt de la courbe X* , ce qui n'était nullement évident *a priori*.

10. Une nouvelle opération sur les formes différentielles

Pour démontrer la Proposition 6, nous aurons besoin d'une opération sur les formes différentielles qui a été définie par P. Cartier dans le cas des variétés de dimension quelconque. Dans le cas particulier des courbes, auquel nous nous limiterons, cette opération avait déjà été envisagée par J. Tate [17].

Soit x un point de X , et soit t un élément de \mathcal{O}_x dont la différentielle dt ne s'annule pas en x . On vérifie alors immédiatement que les p fonctions $1, t, \dots, t^{p-1}$ forment une *base* de \mathcal{O}_x considéré comme module sur \mathcal{O}_x^p ; en d'autres termes, toute fonction $f \in \mathcal{O}_x$ s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme:

$$(31) \quad f = f_0^p + f_1^p t + \dots + f_{p-1}^p t^{p-1}, \quad \text{avec } f_i \in \mathcal{O}_x.$$

Les f_i^p sont des combinaisons linéaires des dérivées successives

$$d^k f / dt^k, \quad 0 \leq k \leq p - 1;$$

en particulier, on a $f_{p-1}^p = -d^{p-1} f / dt^{p-1}$.

Soit $\omega = f dt$ un élément de Ω_x^1 , et posons:

$$(32) \quad C(\omega) = f_{p-1} dt;$$

l'opération $C : \Omega_x^1 \rightarrow \Omega_x^1$ ainsi définie est l'opération de Cartier et Tate. On montre (cf. [17], th. 1) qu'elle ne dépend pas de l'élément t choisi; de plus, en prenant f dans K et non plus dans \mathcal{O}_x , on prolonge C en une opération définie sur toutes les différentielles (régulières ou non) de X .

Les deux propositions suivantes sont dues à Cartier:

PROPOSITION 8. (i) $C(\omega_1 + \omega_2) = C(\omega_1) + C(\omega_2)$.

(ii) $C(f^p\omega) = fC(\omega)$.

(iii) $C(df) = 0$.

(iv) $C(f^{p-1}df) = df$.

(v) La suite $0 \rightarrow \mathcal{W}_m / F\mathcal{W}_m \xrightarrow{D_m} \Omega_1 \xrightarrow{C^m} \Omega_1 \rightarrow 0$ est une suite exacte ($m \geq 1$).

Les formules (i), (ii) et (iii) résultent immédiatement de (31) et (32); pour la formule (iv), voir [17], Lemme 1. Il est clair que C est surjectif, et (v) se réduit donc à montrer que $\text{Ker}(C^m) = \text{Im}(D_m)$. Pour $m = 1$, cela signifie que $C(\omega) = 0 \Rightarrow \omega = df$, ce qui est immédiat sur les formules (31) et (32); à partir de là, on va raisonner par récurrence sur m , en utilisant la formule (dédue des formules (i) à (iv)) :

$$(vi) \quad CD_m\alpha = D_{m-1}R\alpha \quad \text{pour } \alpha \in \mathcal{W}_m.$$

Il est clair que (vi) entraîne que $\text{Im}(D_m) \subset \text{Ker}(C^m)$; inversement, soit $\omega \in \Omega_x^1$ tel que $C^m(\omega) = 0$; vu l'hypothèse de récurrence, il existe $\beta \in \mathcal{W}_{m-1}(\mathcal{O}_x)$ tel que $D_{m-1}\beta = C(\omega)$; si l'on choisit un $\alpha \in \mathcal{W}_m(\mathcal{O}_x)$ tel que $R\alpha = \beta$, on aura, d'après (vi), $C(\omega - D_m\alpha) = 0$, d'où, d'après ce qu'on a vu plus haut, $\omega - D_m\alpha = df$; en posant alors $\alpha' = \alpha + V^{m-1}f$, on aura bien $\omega = D_m\alpha'$, *qfd*.

PROPOSITION 9. L'homomorphisme $C : H^0(X, \Omega^1) \rightarrow H^0(X, \Omega^1)$ coïncide avec la transposée F' de l'opération F .

Il nous faut montrer que, si ω est une forme différentielle, et r une répartition, on a:

$$\langle r^p, \omega \rangle = \langle r, C\omega \rangle^p.$$

Ceci s'écrit, en vertu de (27):

$$\sum_{x \in X} \text{res}_x(r^p\omega) = \sum_{x \in X} \text{res}_x(r_x C\omega)^p,$$

ce qui résulte de la formule suivante, facile à vérifier:

$$(33) \quad \text{res}_x(\pi)^p = \text{res}_x(C\pi), \quad \pi \text{ étant une forme différentielle quelconque.}$$

La Proposition 6 est maintenant une conséquence évidente de la Proposition 8, (v) et de la Proposition 9.

REMARQUE. Comme l'a montré Cartier, l'opération C peut être définie sur les formes différentielles fermées d'une variété algébrique de dimension quelconque; pour les formes de degré 1, les formules (i) à (iv) de la Proposition 8 subsistent sans changement alors que (v) doit être formulée de façon légèrement différente (il faut tenir compte du fait que C et ses itérées ne sont pas partout définies).

11. Classes de diviseurs d'ordre p

Soit G le groupe des classes de diviseurs de X , au sens de l'équivalence linéaire; soit G_x le sous-groupe des éléments $d \in G$ tels que $pd = 0$.

PROPOSITION 10. *Le groupe G_p est canoniquement isomorphe au groupe additif des différentielles $\omega \in H^0(X, \Omega^1)$ qui vérifient $C(\omega) = \omega$. En particulier, c'est un groupe fini d'ordre p^σ .*

(Pour la définition de l'entier σ , voir n° 9.)

Nous allons tout d'abord définir une application $\theta : G_p \rightarrow H^0(X, \Omega^1)$.

Soit $d \in G_p$, et soit D un diviseur appartenant à la classe d ; puisque $pd = 0$, il existe une fonction $f \neq 0$ telle que $pD = (f)$; posons $\omega = df/f$, différentielle "logarithmique" de f . Si l'on change D en un diviseur équivalent $D + (g)$, ceci a pour effet de multiplier f par g^p , ce qui ne change pas df/f ; donc ω ne dépend que de d , et peut être notée $\theta(d)$. Enfin, si $x \in X$, l'équation $pD = (f)$ montre que l'on peut écrire $f = t^p u$, où u est une unité de \mathcal{O}_x , d'où $df/f = du/u$ ce qui montre que df/f n'a pas de pôle en x ; ainsi $\theta(d)$ est bien une différentielle de 1ère espèce.

On vérifie tout de suite que l'application θ est un homomorphisme injectif de G_p dans $H^0(X, \Omega^1)$. On a de plus $\theta(d) = df/f$, et les formules (ii) et (iv) de la Proposition 8 montrent que:

$$C(df/f) = C(f^{p-1} df/f^p) = C(f^{p-1} df)/f = df/f.$$

Inversement, si une forme différentielle ω vérifie l'équation $C(\omega) = \omega$, elle est de la forme df/f d'après un théorème de Jacobson ([7], th. 15); si de plus ω est une forme de première espèce, l'ordre de la fonction f en un point quelconque de X est divisible par p , ce qui signifie que $(f) = pD$, d'où $\omega = \theta(d)$, en désignant par d la classe du diviseur D . Ainsi θ est bien un isomorphisme de G_p sur l'ensemble des points fixes de C (ou de F' , cela revient au même d'après la Proposition 9), cqfd.

REMARQUES. (1) La Proposition 10 était connue ([12], Satz II) dans le cas particulier où le corps de base k est la clôture algébrique de F_p , cette hypothèse permettant d'utiliser la théorie du corps de classes.

(2) La Proposition 10 a été étendue aux variétés normales de dimension quelconque par Cartier (le seul point non évident étant de montrer que l'équation $C(\omega) = \omega$ caractérise encore les différentielles logarithmiques).

(3) On peut donner de la Proposition 10 une démonstration toute différente, basée sur la théorie de la jacobienne (cf. n° 19).

12. Exemple: courbes elliptiques

On a alors $\dim H^1(X, \mathcal{O}) = \dim H^0(X, \Omega^1) = g = 1$, et la matrice de Hasse-Witt de X se réduit à un scalaire A , l'invariant de Hasse de la courbe (cf. [4]); il n'est déterminé de façon unique qu'une fois choisi un élément de base dans $H^1(X, \mathcal{O})$ ou $H^0(X, \Omega^1)$. Si, en caractéristique $p \neq 2$, on suppose X donnée sous la forme de Legendre:

$$y^2 = x(x - 1)(x - \lambda),$$

on peut prendre pour élément de base de $H^0(X, \Omega^1)$ la forme différentielle dx/y , et l'invariant A est une fonction $P(\lambda)$ de λ . M. Deuring [2] a montré que $P(\lambda)$ est un polynôme de degré $(p - 1)/2$ en λ qui n'est identiquement nul pour aucune

valeur de p ; il n'y a donc qu'un nombre fini de courbes elliptiques telles que $A = 0$, pour une caractéristique donnée.

Résumons les propriétés de X suivant que A est nul ou non:

(i) $A \neq 0$ (cas "général"). On a $\nu = 0$, $\sigma = 1$. Le groupe des éléments de X d'ordre p a p éléments; il existe $\omega \in H^0(X, \Omega^1)$, $\omega \neq 0$, avec $\omega = df/f$, $f \in k(X)$. Le Λ -module $H^1(X, \mathscr{W})$ est un module libre de rang 1.

(ii) $A = 0$ (cas "exceptionnel"). On a $\nu = 1$, $\sigma = 0$. Le groupe des éléments de X d'ordre p a un seul élément; toute forme $\omega \in H^0(X, \Omega^1)$ s'écrit $\omega = df$, avec $f \in k(X)$. Le Λ -module $H^1(X, \mathscr{W})$ est un module libre de rang 2.

Signalons également que, d'après Deuring [2] (resp. Dieudonné [3]), la condition $A \neq 0$ est nécessaire et suffisante pour que l'anneau des endomorphismes de X soit commutatif (resp. pour que le groupe algébrique X soit "analytiquement isomorphe" au groupe multiplicatif G_m).

§3. REVÊTEMENTS CYCLIQUES D'ORDRE p^n D'UNE VARIÉTÉ ALGÈBRE

Les nos 13, 14, 15 ci-dessous sont consacrés à diverses propriétés élémentaires des revêtements; dans ces nos, la caractéristique du corps de base k est quelconque.

13. Quotient d'une variété algébrique par un groupe fini d'automorphismes

Soit Y une variété algébrique, sur laquelle opère (à droite) un groupe fini G ; dans tout ce qui suit, nous supposons vérifiée la condition:

(A) *Toute orbite de G est contenue dans un ouvert affine de Y .*

Puisqu'une orbite est un ensemble fini, la condition précédente est vérifiée si Y est une sous-variété localement fermée d'un espace projectif: on le voit en appliquant les Lemmes 1 et 2 de [14], n° 52.

Soit X l'ensemble quotient Y/G , que nous munirons de la topologie quotient de la topologie de Zariski de Y ; nous noterons π la projection canonique: $Y \rightarrow X$. Si f est une fonction définie au voisinage d'un point $x \in X$, nous dirons que f est régulière en x si $f \circ \pi$ est régulière au voisinage de $\pi^{-1}(x)$; on définit ainsi un sous-faisceau \mathcal{O}_X du faisceau $\mathscr{F}(X)$ des germes de fonctions sur X .

LEMME 3. *La topologie et le faisceau précédent définissent sur X une structure de variété algébrique.*

Supposons d'abord que Y soit une variété affine, d'anneau de coordonnées A , et soit A^G l'ensemble des éléments de A laissés fixes par G . On vérifie tout de suite que A^G est une k -algèbre de type fini, sans éléments nilpotents, donc est l'anneau de coordonnées d'une variété affine Z ; on montre ensuite, par des raisonnements élémentaires, que Z , munie de sa topologie de Zariski et de son faisceau d'anneaux locaux, est isomorphe à Y/G , muni de la topologie et du faisceau définis ci-dessus; ceci démontre le Lemme 3 lorsque Y est affine.

Dans le cas général, l'hypothèse (A) montre que l'on peut recouvrir Y au moyen d'un nombre fini d'ouverts affines V_i , stables par G . D'après ce qui précède, X est donc recouvert par les ouverts affines $U_i = V_i/G$, ce qui montre que X vérifie

l'axiome (VA_I) de [14], n° 34. Quant à (VA_{II}) , il résulte de ce que $X \times X$ est isomorphe à $(Y \times Y)/(G \times G)$.

Nous ne poursuivrons pas l'étude de Y/G dans le cas général. Signalons seulement que Y/G est une variété affine (resp. complète) si et seulement si Y a la même propriété (pour les variétés affines, cela résulte de la démonstration du Lemme 3 et du Théorème I de [15]—pour les variétés complètes, cela résulte directement de la définition donnée dans [15], §4).

NOTE. Dans la littérature, on trouvera surtout discuté le cas particulier (qui est le plus important pour les applications) où Y est une variété irréductible et normale; il en est alors de même de X qui peut être identifiée à la normalisée de la variété des "points de Chow" des orbites de G ; inversement, Y est la normalisée de X dans l'extension des corps de fonctions rationnelles $k(Y)/k(M)$. Pour une discussion de ce point de vue, cf. [8], §1.

14. Revêtements

Les notations étant celles du n° précédent, nous dirons que Y est un G -revêtement de X (ou encore un revêtement de groupe de Galois G), si le groupe G opère sans points fixes sur Y , i.e. si:

$$y \cdot g = y, \quad y \in Y, g \in G \text{ entraînent } g = e.$$

Bien entendu, si X' est isomorphe à X , on dira encore que Y est un revêtement de X' .

L'ensemble des classes de G -revêtements de X sera noté $\pi^1(X, G)$. Comme dans le cas topologique, c'est un foncteur covariant en G et contravariant en X :

(a) Si Y est un G -revêtement de X , et si $f: X' \rightarrow X$ est une application régulière, on a un revêtement induit Y' de X' (Y' est l'image réciproque de Y par

$$f \times \pi: X' \times Y \rightarrow X \times X).$$

D'où une application $f^1: \pi^1(X, G) \rightarrow \pi^1(X', G)$.

(b) Si f est un homomorphisme de G dans un groupe fini G' , on fait opérer G sur $Y \times G'$ par la formule usuelle:

$$(34) \quad (y, g') \cdot g = (y \cdot g, f(g^{-1}) \cdot g');$$

en posant $Y \times_G G' = (Y \times G')/G$, on vérifie (en se ramenant au cas des variétés affines, comme dans la démonstration du Lemme 3) que $Y \times_G G'$ est un G' -revêtement de X . D'où une application $f_1: \pi^1(X, G) \rightarrow \pi^1(X, G')$.

Lorsque G est abélien, on peut appliquer (b) à l'homomorphisme canonique $G \times G \rightarrow G$, d'où une application de $\pi^1(X, G \times G)$ dans $\pi^1(X, G)$. En utilisant la formule (facile à vérifier):

$$(35) \quad \pi^1(X, G \times H) = \pi^1(X, G) \times \pi^1(X, H),$$

on voit que l'on a défini une loi de composition sur $\pi^1(X, G)$; des raisonnements classiques montrent que cette loi de composition fait de $\pi^1(X, G)$ un groupe abélien.

REMARQUE. Supposons que $k = \mathbb{C}$ et que X soit une variété projective connexe. En utilisant les résultats de [16], on peut montrer que les revêtements de X (au sens ci-dessus) sont en correspondance bijective avec les revêtements topologiques de l'espace X^h que l'on obtient en munissant X de la topologie "usuelle" (cf. [16], n° 5). Si G est un groupe fini, les éléments de $\pi^1(X, G)$ correspondent donc aux classes d'homomorphismes de $\pi_1(X^h)$ dans G , modulo l'équivalence définie par les automorphismes intérieurs de G ; si G est abélien, on a ainsi:

$$\pi^1(X, G) = \text{Hom}(\pi_1(X^h), G),$$

ce qui justifie dans ce cas la notation $\pi^1(X, G)$.

15. Espaces fibrés associés à un revêtement

Soit Y un G -revêtement de X , et supposons d'abord que $k = \mathbb{C}$. On peut considérer Y comme un espace fibré analytique principal, de base X , et de groupe structural le groupe discret G ; si f est un homomorphisme de G dans un groupe algébrique H , on déduit de Y , par extension du groupe structural, un espace fibré analytique principal $Y \times_G H$, de groupe structural H ; cet espace fibré peut être plus simple à étudier que le revêtement Y . C'est la méthode introduite par Weil ([18], Chap. III) lorsque X est une courbe, H étant un groupe linéaire $GL_n(\mathbb{C})$.

Essayons d'imiter cette construction dans le cas général. Il est toujours possible de définir $Y \times_G H$ comme la variété quotient $(Y \times H)/G$, le groupe G opérant par la formule (34). Le groupe H opère à droite sur $Y \times_G H$, et l'ensemble quotient $(Y \times_G H)/H$ s'identifie à X . Mais $Y \times_G H$ n'est pas toujours un *espace fibré algébrique* (au sens de Weil [20], c'est-à-dire localement trivial): le lemme suivant fournit un critère pour que ce soit le cas:

LEMME 4. *Supposons que, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage saturé U de $\pi^{-1}(x)$, et une application régulière $\theta : U \rightarrow H$ telle que:*

$$(36) \quad \theta(y \cdot g) = \theta(y) \cdot f(g) \quad \text{pour } y \in U \quad \text{et } g \in G.$$

Alors $Y \times_G H$ est un espace fibré algébrique principal, de base X , et de groupe structural H .

La question étant locale, on peut supposer que $U = Y$. Soit alors

$$\alpha : Y \times H \rightarrow Y \times H$$

l'application définie par la formule:

$$(37) \quad \alpha(y, h) = (y, \theta(y) \cdot h).$$

Il est clair que α est birégulière. De plus, en combinant (36) et (37), on voit que α commute aux opérations de G (en faisant opérer G sur le second $Y \times H$ par les opérations de G sur Y seulement). Par passage au quotient, α définit donc une application birégulière $\bar{\alpha} : Y \times_G H \rightarrow X \times H$, commutant avec les opérations de H . Ceci montre bien que $Y \times_G H$ est un espace fibré algébrique, eqfd.

PROPOSITION 11. *L'hypothèse du Lemme 4 est vérifiée lorsque H est un sous-groupe algébrique du groupe linéaire $GL_n(k)$ vérifiant la condition:*

$$(R) \text{ — Il existe une section rationnelle } GL_n(k)/H \rightarrow GL_n(k).$$

(Cf. [16], n° 20, pour une discussion de la condition (R)).

Soit $x \in X$, et soient y_1, \dots, y_r les éléments de $\pi^{-1}(x)$; d'après la condition (A) du n° 13 on peut trouver des fonctions régulières au voisinage de $\pi^{-1}(x)$ et prenant aux y_i des valeurs données. Si l'on désigne par $M_n(k)$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n sur k , il existe donc un voisinage ouvert saturé V' de $\pi^{-1}(x)$, et une application régulière $a : V' \rightarrow M_n(k)$ telle que $a(y_1)$ (resp. $a(y_i)$, $2 \leq i \leq r$) soit la matrice unité (resp. la matrice 0). Posons alors:

$$\theta'(y) = \sum_{h \in G} a(y \cdot h) \cdot f(h^{-1}) \quad \text{pour } y \in V.$$

Un calcul immédiat montre que $\theta' : V' \rightarrow M_n(k)$ vérifie (36); de plus, on a $\theta'(y_1) = 1 \in GL_n(k)$; il existe donc un voisinage ouvert saturé V de $\pi^{-1}(x)$ que θ' applique dans $GL_n(k)$.

Mais l'hypothèse (R) signifie qu'il existe un voisinage ouvert W de l'élément neutre de $GL_n(k)$, saturé pour les translations à droite de H , et une "rétraction" $r : W \rightarrow H$ telle que:

$$r(w \cdot h) = r(w) \cdot h \quad \text{si } w \in W \quad \text{et } h \in H.$$

Si l'on pose alors $U = \theta'^{-1}(W)$ et $\theta = r \circ \theta'$, l'application θ est bien une application régulière de U dans H vérifiant (36), *qfd*.

COROLLAIRE. *Supposons que H soit l'un des groupes $GL_n(k)$, $SL_n(k)$, $Sp_n(k)$, ou un groupe linéaire résoluble (par exemple le groupe additif G_a). Alors $Y \times_G H$ est un espace fibré principal algébrique.*

Il faut vérifier la condition (R) dans chaque cas. C'est trivial pour $GL_n(k)$ et $SL_n(k)$, facile pour $Sp_n(k)$ (cf. [16], n° 20); dans le cas d'un groupe linéaire résoluble, c'est un théorème de Rosenlicht ([10], th. 10).

EXEMPLE. *Revêtements cycliques d'ordre premier à p .*

Prenons pour G le groupe cyclique $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, avec $(n, p) = 1$. A toute racine primitive n -ème de l'unité est associé un isomorphisme f de G dans $k^* = GL_1(k)$. En appliquant le corollaire à la Proposition 11, on associe à tout revêtement $Y \in \pi^{-1}(X, G)$ un espace fibré à groupe k^* , c'est-à-dire un élément $f(Y)$ de $H^1(X, \mathcal{O}^*)$ (en désignant par \mathcal{O}^* le faisceau des \mathcal{O}_x^* , groupes multiplicatifs des éléments inversibles des \mathcal{O}_x). Si l'on suppose X projective, un raisonnement semblable à celui de la Proposition 12 ci-après montre que f est un isomorphisme de $\pi^{-1}(X, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ sur le sous-groupe des éléments $d \in H^1(X, \mathcal{O}^*)$ vérifiant $nd = 0$. Lorsque X est non singulière, le groupe $H^1(X, \mathcal{O}^*)$ n'est autre que le groupe des classes de diviseurs de X (cf. [20], §3), et le résultat précédent est bien connu (cf. [8], où il est déduit de la théorie de Kummer).

16. Revêtements cycliques d'ordre p

Soit $G = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Si l'on identifie G au corps premier F_p , on obtient un plongement f de G dans le groupe additif G_a du corps de base k . En appliquant le corollaire à

la Proposition 11 à f on fait correspondre à tout G -revêtement Y de X un espace fibré algébrique principal de base X et de groupe structural G_a , autrement dit un élément de $H^1(X, \mathcal{O})$. On a donc obtenu une application canonique

$$(38) \quad f_1 : \pi^1(X, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}).$$

PROPOSITION 12. *Si X est une variété projective, l'application f_1 est un isomorphisme du groupe $\pi^1(X, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ sur $H^1(X, \mathcal{O})^F$, sous-groupe de $H^1(X, \mathcal{O})$ formé des éléments ξ vérifiant:*

$$(39) \quad F\xi = \xi.$$

Le fait que f_1 soit un homomorphisme est facile à vérifier. Cherchons l'image de cette homomorphisme. Si l'on note $\wp : G_a \rightarrow G_a$ l'application $\wp(\lambda) = \lambda^p - \lambda$ (i.e. $\wp = F - 1$), on a une suite exacte:

$$(40) \quad 0 \rightarrow G \xrightarrow{f} G_a \xrightarrow{\wp} G_a \rightarrow 0.$$

Le fait que $\wp \circ f = 0$ montre que l'homomorphisme composé:

$$\pi(X, G) \xrightarrow{f_1} H^1(X, \mathcal{O}) \xrightarrow{\wp} H^1(X, \mathcal{O})$$

est identiquement nul, ce qui signifie que l'image de f_1 est contenue dans $H^1(X, \mathcal{O})^F$. Inversement, soit Z un espace fibré correspondant à un élément de $H^1(X, \mathcal{O})^F$, c'est-à-dire tel que l'espace fibré $\wp(Z)$ (dédit de Z par $\wp : G_a \rightarrow G_a$) soit trivial. Le groupe G opère sur Z , et la suite exacte (40), jointe à un raisonnement local évident, montre que Z/G s'identifie à $\wp(Z)$; si donc l'on a une section $s : X \rightarrow \wp(Z)$ qui identifie X à une sous-variété $s(X)$ de $\wp(Z)$, l'image réciproque Y de $s(X)$ dans Z sera un G -revêtement de X , donc un élément de $\pi^1(X, G)$. De plus, on vérifie facilement que $f(Y) = Y \times_G G_a$ s'identifie canoniquement à Z , ce qui montre bien que $Z \in \text{Im}(f_1)$.

Reste à montrer que le noyau de f_1 est réduit à 0 (c'est le seul point qui fasse intervenir l'hypothèse que X est projective). Soit donc Y un G -revêtement tel que $f(Y)$ soit isomorphe à $X \times G_a$; l'injection $f : G \rightarrow G_a$ définit une injection de Y dans $X \times G_a$; mais X est une variété complète, donc aussi Y , et l'image de Y dans le facteur G_a ne peut consister qu'en un nombre fini de points (cf. [15], §4, par exemple). Il en résulte tout de suite que Y est trivial sur chaque composante connexe de X , donc aussi sur X tout entier, ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE 1. *Soit σ la dimension de la "composante semi-simple" $H^1(X, \mathcal{O})$, de $H^1(X, \mathcal{O})$ (cf. n° 9). Le groupe $\pi^1(X, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ est un groupe fini d'ordre p^σ .*

Cela résulte de ce qui a été dit au n° 9.

COROLLAIRE 2. *Une variété de dimension ≥ 2 qui est une intersection complète n'a aucun revêtement cyclique de degré p non-trivial.*

En effet, si X est une telle variété, on sait que $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$, cf. [14], n° 78.

REMARQUE. Si X n'est pas irréductible, X peut posséder des revêtements localement triviaux; ils correspondent au sous-groupe $H^1(X, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ de $H^1(X, \mathcal{O})^F$.

17. Variante

On peut obtenir les résultats du n° précédent par une autre méthode, reposant sur le lemme suivant:

LEMME 5. Soient X une variété algébrique, G un groupe fini, Y un G -revêtement de X , et x un point de X . Désignons par \mathcal{O}'_x l'anneau des germes de fonctions régulières au voisinage de $\pi^{-1}(x) \subset Y$. L'anneau \mathcal{O}'_x est un anneau semi-local sur lequel opère G , et l'on a:

$$(41) \quad H^0(G, \mathcal{O}'_x) = \mathcal{O}_x \quad \text{et} \quad H^q(G, \mathcal{O}'_x) = 0 \quad \text{pour} \quad q > 0.$$

Le fait que $H^0(G, \mathcal{O}'_x) = \mathcal{O}_x$ résulte de la définition d'une variété quotient donnée au n° 13. D'autre part l'anneau semi-local \mathcal{O}'_x a pour anneaux locaux les \mathcal{O}_y , $y \in \pi^{-1}(x)$; il s'ensuit (cf. [11], p. 15) que le complété $\hat{\mathcal{O}}'_x$ de \mathcal{O}'_x est isomorphe au produit des $\hat{\mathcal{O}}_y$; comme le groupe G opère sans point fixe sur $\pi^{-1}(x)$, on en déduit, en appliquant un résultat classique de cohomologie des groupes:

$$(42) \quad H^q(G, \hat{\mathcal{O}}'_x) = 0 \quad \text{pour} \quad q > 0.$$

Mais \mathcal{O}'_x est un module de type fini sur \mathcal{O}_x (pour le voir, prendre pour Y une variété affine, et expliciter \mathcal{O}_x et \mathcal{O}'_x en fonction de l'anneau de coordonnées de Y); il s'ensuit (cf. [16], Annexe, par exemple) que l'on a:

$$(43) \quad \hat{\mathcal{O}}'_x = \mathcal{O}'_x \otimes \hat{\mathcal{O}}_x, \quad \text{le produit tensoriel étant pris sur } \mathcal{O}_x.$$

Comme $\hat{\mathcal{O}}_x$ est un \mathcal{O}_x -module plat ([16], *loc.cit.*), on déduit de (43):

$$(44) \quad H^q(G, \hat{\mathcal{O}}'_x) = H^q(G, \mathcal{O}'_x) \otimes \hat{\mathcal{O}}_x.$$

Du fait que le couple $(\mathcal{O}_x, \hat{\mathcal{O}}_x)$ est plat ([16], prop. 27), les relations (42) et (44) entraînent $H^q(G, \mathcal{O}'_x) = 0$ pour $q > 0$, *eqfd.*

REMARQUES. (1) La démonstration de (42) montre en outre que l'on a:

$$\hat{\mathcal{O}}_y = \hat{\mathcal{O}}_x \quad \text{si} \quad \pi(y) = x.$$

Autrement dit, la projection π est un isomorphisme "analytique".

(2) En utilisant le Lemme 5, on peut démontrer l'existence d'une *suite spectrale* analogue à celle de Cartan-Leray; cette suite aboutit à $H^*(X, \mathcal{O})$ et a pour terme E_2 le groupe bigradué $H^*(G, H^*(Y, \mathcal{O}_Y))$. Cf. un mémoire de A. Grothendieck à paraître prochainement.

Revenons maintenant au cas $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Comme la fonction $1 \in \mathcal{O}'_x$ a une trace nulle, la relation $H^1(G, \mathcal{O}'_x) = 0$ entraîne l'existence d'une fonction $\theta \in \mathcal{O}'_x$ vérifiant:

$$(45) \quad \theta^\sigma = \theta + 1 \quad (\sigma \text{ désignant le générateur de } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}).$$

A l'écriture près, c'est l'équation (36). On remarquera que, si Y est irréductible, θ est un *générateur d'Artin-Schreier de l'extension* $k(Y)/k(X)$.

Une fois démontrée l'existence des fonctions θ , la construction de la classe de cohomologie ξ associée à Y ne présente plus de difficultés: on commence par construire un recouvrement ouvert $\{U_i\}$ de X , et des fonctions θ_i , régulières sur

$V_i = \pi^{-1}(U_i)$, et vérifiant (45). Si l'on pose $f_{ij} = \theta_i - \theta_j$ dans $V_i \cap V_j$, les f_{ij} sont invariants par G , et constituent un 1-cocycle de $\{U_i\}$ à valeurs dans le faisceau \mathcal{O} , dont la classe de cohomologie n'est autre que l'élément ξ cherché. Les autres résultats de la Proposition 12 ne présentent pas davantage de difficultés. Par exemple, le fait que $F\xi = \xi$ se démontre en remarquant que les $g_i = \theta_i^p - \theta_i$ sont invariants par G , donc forment une 0-cochaîne de $\{U_i\}$ à valeurs dans \mathcal{O} , dont le cobord est $f_{ij}^p - f_{ij}$.

18. Revêtements cycliques d'ordre p^n

Soit n un entier ≥ 1 , et soit $G = \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$; on peut identifier canoniquement G au groupe $W_n(F_p)$, cf. n° 1. Comme F_p se plonge dans k , on a ainsi défini un isomorphisme f de G dans le groupe $W_n = W_n(k)$. Ce dernier groupe est un groupe algébrique, en correspondance birégulière avec k^n ; c'est de plus un groupe linéaire: cela se voit, soit directement, soit en invoquant [10], th. 16, cor. 4. On peut donc appliquer à W_n le corollaire à la Proposition 11: si Y est un G -revêtement de X , l'espace $Y \times_G W_n$ est un espace fibré principal de groupe structural W_n , c'est-à-dire un élément de $H^1(X, \mathcal{W}_n)$. Comme au n° 16, on a donc obtenu une application

$$(46) \quad f_1 : \pi^1(X, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{W}_n).$$

PROPOSITION 13. *Si X est une variété projective, l'application f_1 est un isomorphisme de $\pi^1(X, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$ sur $H^1(X, \mathcal{W}_n)^F$.*

La démonstration étant identique à celle de la Proposition 12, nous ne la répèterons pas; indiquons simplement que, ici encore, elle repose essentiellement sur le fait que l'homomorphisme $\wp = F - 1$ définit par passage au quotient un isomorphisme de W_n/G sur W_n .

Soient maintenant n et m deux entiers, avec $n \geq m$; on a un homomorphisme canonique de $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ sur $\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}$, d'où, d'après le n° 14, b) un homomorphisme $\pi^1(X, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}) \rightarrow \pi^1(X, \mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})$; cherchons l'image de cet homomorphisme:

PROPOSITION 14. *Soit α un élément de $\pi^1(X, \mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})$ et soit $\xi = f_1(\alpha)$ la classe de cohomologie qui lui est associée. Pour que α appartienne à l'image de $\pi^1(X, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$, il faut et il suffit que $\delta_{n,n-m}^1(\xi) = 0$.*

(Pour la définition de l'opération de Bockstein $\delta_{n,n-m}^1$, voir n° 3.)

Nous aurons besoin du lemme suivant:

LEMME 6. *Soit H un Λ -module de longueur finie, et soit F un endomorphisme p -linéaire de H . L'application $\wp = F - 1 : H \rightarrow H$ est alors une surjection.*

Il existe un entier n tel que l'on ait $p^n H = 0$; nous raisonnerons par récurrence sur n . Lorsque $n = 1$, H est un k -espace vectoriel de dimension finie, et le fait que \wp est surjectif est connu (cf. n° 9); le cas général résulte de l'hypothèse de récurrence, appliquée à pH et à H/pH .

Nous pouvons maintenant démontrer la Proposition 14:

Si α est image d'un élément $\beta \in \pi^1(X, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$, correspondant à une classe de cohomologie $\eta \in H^1(X, \mathcal{W}_n)^F$, on voit tout de suite que $\xi = R^{n-m}\eta$, d'où évidemment $\delta_{n,n-m}^1(\xi) = 0$.

Réciproquement, soit $\xi \in H^1(X, \mathcal{W}_m)^F$ vérifiant l'équation précédente; il nous faut montrer que ξ s'écrit $\xi = R^{n-m}(\eta)$, avec $\eta \in H^1(X, \mathcal{W}_n)^F$, c'est-à-dire $F\eta = \eta$. Or, par définition même des opérations de Bockstein, la relation $\delta_{n, n-m}^1(\xi) = 0$ signifie que $\xi = R^{n-m}(\eta')$, avec $\eta' \in H^1(X, \mathcal{W}_n)$. De plus, la relation $F\xi = \xi$ montre que $R^{n-m}(F\eta' - \eta') = 0$, i.e. $F\eta' - \eta' = V^m\theta$ avec $\theta \in H^1(X, \mathcal{W}_{n-m})$. En appliquant le Lemme 6 à $H^1(X, \mathcal{W}_{n-m})$, on peut écrire $\theta = F\theta' - \theta'$, et, en posant $\eta = \eta' - V^m\theta'$, on obtient un élément vérifiant les propriétés requises, cqfd.

COROLLAIRE. *Si X n'a pas de torsion en dimension 1, le groupe $\pi^1(X, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$ est somme directe de σ groupes isomorphes à $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$.*

(Pour la définition de σ , voir Proposition 12, Corollaire 1.)

Désignons par H_n le groupe $\pi^1(X, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$, considéré comme sous-groupe de $H^1(X, \mathcal{W}_n)$; d'après la Proposition 14, l'homomorphisme canonique

$$R^{n-1} : H_n \rightarrow H_1$$

est surjectif. De plus il est clair que son noyau est VH_{n-1} . On déduit de là, par récurrence sur n , que H_n est un groupe fini d'ordre $p^{n\sigma}$; comme il est plongé dans $H^1(X, \mathcal{W}_n)$, on a $p^n H_n = 0$. De plus, le composé:

$$H_n \xrightarrow{R} H_{n-1} \xrightarrow{V} H_n$$

est la multiplication par p (en vertu de la formule $FVR = p$ et du fait que F est l'identité sur H_n); puisque R est surjectif (d'après la Proposition 14), ceci entraîne que $H_{n-1} = pH_n$, et l'on voit donc que $H_n/pH_n = H_1$ a p^σ éléments. Ceci suffit à prouver que H_n est somme directe de σ groupes cycliques d'ordre p^n , cqfd.

REMARQUE. Lorsque X a de la torsion en dimension 1 la détermination explicite de $\pi^1(X, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$ peut encore se faire de manière analogue, mais plus compliquée. Nous nous bornerons à donner le résultat:

Soient Z_m^1 , $m = 1, 2, \dots$, les sous-espaces vectoriels de $H^1(X, \mathcal{O})$ définis par les formules (6) du n° 3; soit σ_m la dimension de la "composante semi-simple" de Z_m^1/Z_{m+1}^1 , et soit τ la dimension de la composante semi-simple de Z^1 . Soit H le groupe abélien de type fini défini par la formule:

$$(47) \quad H = \sum_{m=1}^{\infty} (\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})^{\sigma_m} + \mathbf{Z}^{\tau}.$$

Le groupe $\pi^1(X, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$ est alors isomorphe à $\text{Hom}(H, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$; autrement dit, tout se passe (au point de vue des revêtements cycliques d'ordre une puissance de p) comme si la variété X avait un "groupe fondamental" isomorphe à H .

19. Courbes algébriques et jacobienes

Soit X une courbe algébrique irréductible, complète, et non singulière. Du fait que X n'a pas de torsion, le corollaire à la Proposition 14 montre que $\pi^1(X, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$ est somme directe de σ groupes cycliques d'ordre p^n ; de plus, d'après le n° 9,

l'entier σ est égal au rang de la "composante semi-simple" de la matrice de Hasse-Witt A de X , c'est-à-dire au rang de $A \cdot A^p \cdots A^{p^{\sigma-1}}$. On retrouve ainsi les résultats de Hasse-Witt [5] et de Schmid-Witt [12].

Soit en outre $\phi : X \rightarrow J$ l'application canonique de X dans sa jacobienne (pour tout ce qui concerne jacobiniennes et variétés abéliennes, cf. [19]). D'après un résultat (inédit) de Rosenlicht, l'homomorphisme

$$\phi^* : H^1(J, \mathcal{O}_J) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X)$$

est bijectif. D'après la Proposition 12 il en est donc de même de

$$\phi^1 : \pi^1(J, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \rightarrow \pi^1(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}).$$

Dans le langage de [8], cela signifie que tout revêtement cyclique d'ordre p de X est "du type d'Albanese".

Nous montrerons ailleurs que tout revêtement d'une variété abélienne A est donné par une isogénie $B \rightarrow A$; ce point étant admis, des raisonnements classiques montrent que $\pi^1(A, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ s'identifie au dual du groupe A_n des points $a \in A$ vérifiant $na = 0$. Appliquant ceci à J et utilisant l'isomorphisme ϕ^1 , on en conclut que $\pi^1(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est dual du groupe J_p , lui-même isomorphe au groupe G_p du n° 11; on retrouve ainsi le fait que le groupe G_p est d'ordre p^σ (Proposition 10).

20. Un exemple

PROPOSITION 15. *Soient G un groupe fini, et r un entier ≥ 1 . Il existe une variété algébrique Y de dimension r , non singulière, qui est une intersection complète dans un espace projectif convenable, et sur laquelle le groupe G opère sans points fixes.*

De plus, dans le cas où $r = 2$ et $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (avec $p \geq 5$), on peut imposer à Y d'être une surface dans $\mathbb{P}_3(k)$.

Nous allons construire Y en suivant une méthode due à Godeaux dans le cas classique:

Considérons une représentation linéaire R du groupe G , et notons $n + 1$ son degré. Puisque G opère linéairement sur k^{n+1} , il opère par passage au quotient sur $P = \mathbb{P}_n(k)$, et la variété quotient P/G est bien définie (cf. n° 13). Nous allons tout d'abord montrer comment l'on peut définir un plongement projectif de cette variété:

Soit S la sous-algèbre de $k[X_0, \dots, X_n]$ formée des polynômes invariants par G ; c'est une algèbre graduée, qui est de type fini sur k . Nous noterons S_d la composante homogène de degré d de S , et nous poserons:

$$(48) \quad S(d) = \sum_{m=0}^{\infty} S_{m\bar{a}}.$$

Un raisonnement élémentaire (analogue à celui utilisé dans la "normalisation projective" des variétés) montre que l'on peut choisir \bar{a} de telle sorte que tous les éléments de $S(d)$ soient des polynômes en ceux de $S_{\bar{a}}$. Si l'on gradue $S(d)$ en considérant $S_{m\bar{a}}$ comme de degré m , ceci signifie que $S(d)$ est une algèbre graduée engendrée par ses éléments de degré 1, donc peut être considérée comme l'anneau de coordonnées projectives d'une sous-variété Z de l'espace projectif $\mathbb{P}_s(k)$, avec

$s + 1 = \dim S_a$. Si l'on choisit une base f_0, \dots, f_s de S_a , les f_i définissent par passage au quotient une application régulière $f : P \rightarrow Z$.

L'application f est invariante par G et définit par passage au quotient un isomorphisme birégulier de P/G sur Z (nous omettons la vérification de ce fait, qui est pénible, mais ne présente pas de difficulté essentielle). C'est donc le plongement projectif cherché.

Soit maintenant Q l'ensemble des points $y \in P$ tels qu'il existe $g \in G$, avec $g \neq e$ et $y \cdot g = y$; soit $Q' = f(Q)$. Les ensembles Q et Q' sont des sous-variétés fermées de P et de Z , de même dimension. Nous supposons vérifiée la condition suivante:

$$(49) \quad r < n - \dim(Q).$$

On observera que $P - Q$ est un G -revêtement de $Z - Q'$, ce qui montre (en utilisant la Remarque 1 du n° 17) que $Z - Q'$ est une variété non singulière.

Soit alors L une sous-variété linéaire de $P_s(k)$, de dimension égale à $s - n + r$; si L est choisie "en position générale", l'inégalité (49) montre qu'elle ne rencontre pas Q' ; de plus, elle rencontre transversalement Z , ce qui entraîne que l'intersection $X = Z \cap L$ soit une variété non singulière, de dimension r , et ne rencontrant pas Q' . Posons $Y = f^{-1}(X)$; il est clair que Y est un G -revêtement de X . De plus, si L est définie par l'annulation de g_1, \dots, g_{n-r} , combinaisons linéaires des f_i , la variété Y sera définie par l'annulation de ces mêmes g_i , considérés comme éléments de $k[X_0, \dots, X_n]$; soit \mathfrak{a} l'idéal engendré par les g_i ; si l'on montre que \mathfrak{a} n'est autre que l'idéal défini par Y , il en résultera bien que Y est une intersection complète. Or, d'après le théorème de Macaulay, \mathfrak{a} est intersection d'idéaux premiers \mathfrak{q}_α correspondant aux idéaux premiers \mathfrak{p}_α associés aux composantes irréductibles Y_α de Y . Soit alors $y \in Y_\alpha$, et soit $x = f(y) \in Z$; comme, par hypothèse, L est transversale à Z en x , les g_i définissent dans \mathcal{O}_x des éléments faisant partie d'un système régulier de paramètres (au sens de [11], p. 29); la relation $\hat{\mathcal{O}}_y = \hat{\mathcal{O}}_x$ montre qu'il en est de même dans \mathcal{O}_y , et l'idéal local $\mathfrak{a}\mathcal{O}_y$ est donc un idéal premier, d'où $\mathfrak{q}_\alpha = \mathfrak{p}_\alpha$ pour tout α , ce qui montre bien que Y est une intersection complète. Comme Y est non singulière et connexe (comme toute intersection complète, cf. [14], n° 78, Proposition 5, par exemple), on voit en outre que Y est irréductible.

La Proposition 15 sera donc démontrée si nous prouvons que l'on peut toujours choisir une représentation R de G vérifiant (49), et de dimension 4 dans le cas $r = 2$, $G = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, $p \geq 5$. Or c'est immédiat:

(a) Dans le cas général, on prend la somme directe d'un nombre suffisant (r par exemple) de copies de la représentation régulière.

(b) Dans le cas particulier $r = 2$, $G = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, $p \geq 5$, on fait correspondre au générateur de G l'endomorphisme $1 + N$ de k^4 , où N est défini par les formules $N(e_i) = e_{i+1}$, $0 \leq i \leq 2$, et $N(e_3) = 0$. L'ensemble Q est réduit au point de coordonnées homogènes $(0, 0, 0, 1)$, et l'on a $r = 2$, $n = 3$, $\dim(Q) = 0$, ce qui vérifie bien l'inégalité (49), *q. f. d.*

REMARQUE. La méthode suivie plus haut pour définir un plongement projectif de P/G a une portée plus générale; en l'utilisant, on peut démontrer que, si Y

est une variété projective sur laquelle opère G , la variété Y/G est aussi une variété projective.

PROPOSITION 16. Soit $G = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, avec $p \geq 5$. Soit Y la surface de $P_3(k)$ dont l'existence est affirmée par la Proposition 15, et posons $X = Y/G$. La surface X est une surface projective, non singulière, vérifiant:

$$(50) \quad H^0(X, \Omega^1) = 0 \quad \text{et} \quad H^1(X, \mathcal{O}) \neq 0.$$

Puisque Y est connexe, c'est un revêtement non trivial de X , donc qui correspond à un élément $\xi \neq 0$ dans $H^1(X, \mathcal{O})^F$. D'autre part, on montre (par le même raisonnement que dans le cas classique) qu'il n'y a pas de forme différentielle de première espèce $\neq 0$ sur une surface non singulière de $P_3(k)$; donc $H^0(Y, \Omega^1) = 0$, et comme $H^0(X, \Omega^1)$ est un sous-espace de $H^0(Y, \Omega^1)$, il est aussi réduit à 0, cqfd.

REMARQUES. (1) En utilisant la suite spectrale du revêtement $Y \rightarrow X$ (cf. n° 17), on peut préciser (50) et montrer que $h^{0,1} = \dim H^1(X, \mathcal{O})$ est égal à 1; de plus, l'opération de Bockstein

$$\beta_1 : H^1(X, \mathcal{O}) \rightarrow H^2(X, \mathcal{O})$$

n'est pas nulle.

Ceci montre que le "groupe fondamental" H de X , au sens du n° 18, est isomorphe à $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.

On observera par ailleurs que le groupe des classes de diviseurs d'ordre p de X est réduit à 0, puisque ce groupe est isomorphe à un sous-groupe de $H^0(X, \Omega^1)$ (cf. n° 11).

(2) Plus généralement, on peut appliquer la Proposition 15 à un p -groupe abélien G quelconque. On obtient ainsi une variété $X = Y/G$ dont le "groupe fondamental" H est isomorphe à G (cela se voit en remarquant que Y joue le rôle d'un "revêtement universel" de X , en vertu du Corollaire 2 à la Proposition 12).

BIBLIOGRAPHIE

1. C. CHEVALLEY. Introduction to the theory of algebraic functions of one variable. Math. Surveys VI, 1951.
2. M. DEURING. Die Typen der Multiplikatorenringe elliptischer Funktionenkörper. Abh. Math. Sem. Hamburg Univ. 14 (1941) pp. 197–272.
3. J. DIEUDONNÉ. Lie groups and Lie hyperalgebras over a field of characteristic $p > 0$. II. Amer. J. Math., 76 (1955) pp. 218–244.
4. H. HASSE. Existenz separabler zyklischer unverzweigter Erweiterungskörper vom Primzahlgrade p über elliptischen Funktionenkörpern der Charakteristik p . J. Reine angew. Math. 172 (1934) pp. 77–85.
5. H. HASSE und E. WITT. Zyklische unverzweigte Erweiterungskörper vom Primzahlgrade p über einem algebraischen Funktionenkörper der Charakteristik p . Monatsh. für Math. u. Phys., 43 (1936), pp. 477–492.
6. J. IGUSA. On some problems in abstract algebraic geometry. Proc. Nat. Acad. Sci. USA., 41 (1955) pp. 964–967.
7. N. JACOBSON. Abstract derivations and Lie algebras. Trans. Amer. Math. Soc., 42 (1937), pp. 206–224.
8. S. LANG. Unramified class field theory for function fields of several variables. Ann. of Math., 64 (1956), pp. 285–325.

9. M. ROSENBLIETH. *Equivalence relations on algebraic curves*. Ann. of Math., 56 (1952), pp. 169–191.
10. M. ROSENBLIETH. *Some basic theorems on algebraic groups*. Amer. J. Math., 78 (1956), pp. 401–443.
11. P. SAMUEL. *Algèbre locale*. Mém. Sci. Maths., n°123, Paris, 1953.
12. H. SCHMID und E. WITT. *Unverzweigte abelsche Körper vom Exponenten p^n über einem algebraischen Funktionenkörper der Charakteristik p* . J. Reine Angew. Math., 176 (1936), pp. 168–173.
13. J. -P. SERRE. *Cohomologie et géométrie algébrique*. Congrès int. d'Amsterdam, 1954, vol. III, pp. 515–520.
14. J. -P. SERRE. *Faisceaux algébriques cohérents*. Ann. of Math., 61 (1955), pp. 197–278.
15. J. -P. SERRE. *Sur la cohomologie des variétés algébriques*. J. Math. Pures Appl., 36 (1957), pp. 1–16.
16. J. -P. SERRE. *Géométrie algébrique et géométrie analytique*. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 6 (1956), pp. 1–42.
17. J. TATE. *Genus change in inseparable extensions of function fields*. Proc. Amer. Math. Soc., 3 (1952), pp. 400–406.
18. A. WEIL. *Généralisation des fonctions abéliennes*. J. Math. Pures Appl., 17 (1938), pp. 47–87.
19. A. WEIL. *Variétés abéliennes et courbes algébriques*. Paris, Hermann, 1948.
20. A. WEIL. *Fibre spaces in algebraic geometry* (Notes by A. Wallace). Chicago Univ., 1952.
21. E. WITT. *Zyklische Körper und Algebren der Charakteristik p vom Grade p^n* . J. Reine angew. Math., 176 (1936), pp. 126–140.