Invent. math. 89, 247–270 (1987)

Inventiones mathematicae

Relèvements modulo p^2 et décomposition du complexe de de Rham

Pierre Deligne[1] et Luc Illusie[2]

[1] Institute for Advanced Study, School of Mathematics, Princeton, NJ 08540, USA
[2] Université de Paris-Sud, Mathématique – Bât. 425, Unité associée au CNRS n° 752, F-91405 Orsay Cedex, France

Sommaire

Introduction

Soit X un schéma propre et lisse sur un corps k. La cohomologie de de Rham de X/k, $H^*_{DR}(X/k) := H^*(X, \Omega^{\cdot}_{X/k})$, est l'aboutissement de la suite spectrale de Hodge

$$E_1^{ij} = H^j(X, \Omega^i_{X/k}) \Rightarrow H^{i+j}_{DR}(X/k). \tag{0.1}$$

On sait que, si k est de caractéristique zéro, (0.1) dégénère en E_1: pour X projectif, cela résulte de la théorie de Hodge, et le cas propre se ramène au cas projectif par le lemme de Chow et la résolution des singularités (cf. [5, 5.5]).

La première démonstration de ce fait n'utilisant pas la théorie de Hodge a été donnée par Faltings [8], comme application de son théorème d'existence d'une décomposition de Hodge-Tate pour la cohomologie étale p-adique des variétés propres et lisses sur les corps locaux d'inégale caractéristique.

Si k est de caractéristique $p > 0$, il peut arriver que (0.1) ne dégénère pas en E_1 (cf. Mumford [22] et 2.5 (i)). Toutefois, Kato a montré récemment [14] que, pour k parfait de caractéristique $p > 0$ et X projectif et lisse sur k, si l'on suppose que X est de dimension $< p$ et se relève sur l'anneau $W(k)$ des vecteurs de Witt de k, alors ce phénomène «pathologique» ne se produit pas. Fontaine et Messing [10] ont étendu ce résultat au cas propre, et déduit, par un argument standard, la dégénérescence de (0.1) en caractéristique zéro. Cette seconde démonstration utilise des techniques cristallines.

Nous donnons ici une démonstration élémentaire d'un résultat plus précis que celui de Kato et Fontaine-Messing, et qui est le suivant. Supposons k parfait, de caractéristique $p>0$, et soit X un k-schéma lisse (de dimension quelconque, et non nécessairement propre). Soient X' déduit de X par l'extension des scalaires $k \xrightarrow{\sim} k$, $\lambda \mapsto \lambda^p$, et $F: X \to X'$ le Frobenius relatif (1.1). Nour prouvons que chaque relèvement lisse $\tilde{X}$ de X sur l'anneau $W_2(k)$ des vecteurs de Witt de longueur 2 détermine un isomorphisme

$$\varphi_{\tilde{X}}: \bigoplus_{0 \leqq i < p} \Omega^i_{X'/k}[-i] \xrightarrow{\sim} \tau_{<p} F_* \Omega^{\cdot}_{X/k} \tag{0.2}$$

dans la catégorie dérivée $D(X', \mathcal{O})$. Il en résulte, par un comptage de dimensions, que si X admet un relèvement lisse $\tilde{X}$ sur $W_2(k)$, et est de plus supposé propre et de dimension $<p$, la suite spectrale (0.1) dégénère en E_1.

Voici le principe de la construction de $\varphi = \varphi_{\tilde{X}}$. Soient $\sigma: W_2(k) \xrightarrow{\sim} W_2(k)$ le relèvement $(\lambda_0, \lambda_1) \mapsto (\lambda_0^p, \lambda_1^p)$ de l'automorphisme $\lambda \mapsto \lambda^p$ de k et $\tilde{X}'$ déduit de $\tilde{X}$ par l'extension des scalaires σ. Si F se relève en $\tilde{F}: \tilde{X} \to \tilde{X}'$, l'homomorphisme $\tilde{F}^*: \Omega^1_{\tilde{X}'/W_2(k)} \to \tilde{F}_* \Omega^1_{\tilde{X}/W_2(k)}$ fournit, après division par p, un morphisme de complexes

$$f: \Omega^1_{X'/k}[-1] \to F_* \Omega^{\cdot}_{X/k}$$

induisant sur $\mathscr{H}^1$ l'isomorphisme de Cartier C^{-1} (1.2) (cette idée, qui remonte à l'article de Mazur [20], a déjà été très largement exploitée). Si $\tilde{F}_1$ et $\tilde{F}_2$ sont deux relèvements, leur «différence» est un homomorphisme de $\Omega^1_{X'/k}$ dans $F_* \mathcal{O}_X$. Elle fournit une homotopie entre les flèches f_1 et f_2 associées à $\tilde{F}_1$ et $\tilde{F}_2$. Ces homotopies vérifient une condition de transitivité. Ceci permet de globaliser la construction à l'aide d'un recouvrement de X par des ouverts où F se relève. On obtient ainsi la composante φ^1 de φ. On définit la composante φ^0 comme la flèche induite par F^*, et on déduit les φ^i de φ^0 et φ^1 grâce à la structure multiplicative du complexe de de Rham (c'est ici qu'intervient la restriction $i<p$).

Cette construction est expliquée au n° 2, après un bref rappel, au n° 1, sur la définition du Frobenius relatif et l'isomorphisme de Cartier. Nous donnons également, au n° 2, l'argument «standard» permettant de déduire de (0.2) la dégénérescence de (0.1) en caractéristique nulle. Pour X de dimension $<p$, relevable sur $W_2(k)$, (0.2) fournit une décomposition dans $D(X', \mathcal{O})$

$$\bigoplus_i \Omega^i_{X'/k}[-i] \xrightarrow{\sim} F_* \Omega^{\cdot}_{X/k}. \tag{0.3}$$

Nous montrons qu'on a encore une telle décomposition pour X de dimension p. Enfin, nous déduisons de (0.2) un théorème d'annulation de type Kodaira en caractéristique p: si X est un k-schéma projectif et lisse, équidimensionnel, relevable sur $W_2(k)$, et si L est un faisceau inversible ample sur X, alors

$$H^j(X, \Omega^i_{X/k} \otimes L^{-1}) = 0 \quad \text{pour} \quad i+j < \inf(p, \dim X).$$

Ce résultat et sa démonstration sont dus à Michel Raynaud. Le théorème classique de Kodaira-Akizuki-Nakano en caractéristique zéro en découle par l'argument habituel.

L'obstruction à l'existence d'une décomposition de type (0.2) et la dépendance de $\varphi_{\tilde{X}}$ par rapport à $\tilde{X}$ sont étudiées au n° 3, où la construction de φ est reprise sur une base S de caractéristique $p>0$. Nous montrons notamment le résultat suivant: si S admet un relèvement $\tilde{S}$ plat sur $\mathbf{Z}/p^2$, si X est un S-schéma lisse et X' est son image inverse par le Frobenius absolu de S, alors X' admet un relèvement lisse sur $\tilde{S}$ si et seulement s'il existe une flèche $\Omega^1_{X'/S}[-1] \to F_*\Omega^\cdot_{X/S}$ dans $D(X', \mathcal{O})$ induisant l'isomorphisme de Cartier C^{-1} sur $\mathscr{H}^1$. Une application à la dégénérescence de la suite spectrale de Hodge relative est donnée au n° 4, où nous traitons aussi brièvement la variante des résultats précédents pour le complexe de de Rham à pôles logarithmiques de long d'un diviseur à croisements normaux.

1. Notations et rappels

Soit p un nombre premier

1.1. Si S est un schéma de caractéristique p, on note F_S l'*endomorphisme de Frobenius* de S (donné par l'identité sur l'espace topologique sous-jacent et $a \mapsto a^p$ sur $\mathcal{O}_S$). Si $u: X \to S$ est un morphisme de schémas, avec S de caractéristique p, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "F_{X/S}"] \arrow[rr, bend left, "F_X"] \arrow[dr, "u"'] & X' \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "u"] \\ & S \arrow[r, "F_S"] & S \end{tikzcd},$$

où le carré est cartésien; le morphisme $F_{X/S}$ est par définition le *morphisme de Frobenius relatif* de X/S; on le notera simplement F quand il n'en pourra résulter de confusion. Pour x section locale de $\mathcal{O}_X$, d'image $x \otimes 1$ dans $\mathcal{O}_{X'}$, on a $F^*_{X/S}(x \otimes 1) = F^*_X(x) = x^p$. Exemple: si X est défini par des équations $f_\alpha = \sum a_{\alpha,m} T^m$ dans l'espace affine $S[T_1, \ldots, T_n] = \mathbf{A}^n_S$, X' est défini par les équations $f_\alpha^{(p)} = \sum a^p_{\alpha,m} T^m$ dans $\mathbf{A}^n_S$, et $F_{X/S}$ est donné par $T_i \mapsto T_i^p$.

Soit $\Omega^\cdot_{X/S}$ le complexe de de Rham de X/S. Nous utiliserons systématiquement des complexes de de Rham relatifs et, par la suite, abrégerons parfois $\Omega^\cdot_{X/S}$ en $\Omega^\cdot_X$, voire $\Omega^\cdot$. Le complexe $F_*\Omega^\cdot_{X/S}$ (où $F = F_{X/S}$) est un complexe de $\mathcal{O}_{X'}$-modules, à différentielle linéaire. Si X est lisse sur S, les $\mathcal{O}_X$-modules $\Omega^i_{X/S}$ sont localement libres de type fini (ainsi que les $\mathcal{O}_{X'}$-modules $\Omega^i_{X'/S}$), et il en est de même des $\mathcal{O}_{X'}$-modules $F_*\Omega^i_{X/S}$, car F est fini localement libre (de rang p^r si X est de dimension relative r sur S). De plus, on a le résultat fondamental suivant, dû à Cartier [4]:

Théorème 1.2 (Cartier). *Soit $X \to S$ un morphisme lisse, avec S de caractéristique p. Il existe un unique homomorphisme de $\mathcal{O}_{X'}$-algèbres graduées*

$$C^{-1}: \bigoplus \Omega^i_{X'/S} \to \bigoplus \mathscr{H}^i F_*\Omega^\cdot_{X/S}$$

tel que $C^{-1}d(x \otimes 1) =$ classe de $x^{p-1}dx$ pour toute section locale x de $\mathcal{O}_{X'}$, et C^{-1} est un isomorphisme.

(L'existence et l'unicité de C^{-1} sont faciles, et l'on vérifie que C^{-1} est un isomorphisme par réduction au cas de la droite affine, et un calcul direct: cf. Katz [15, 7.2].)

1.3. Si k est un corps parfait de caractéristique p, on note $W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt de k, et $W_n(k)=W(k)/p^n$. L'anneau $W_n(k)$ est plat sur $\mathbf{Z}/p^n$, muni d'un isomorphisme $W_n(k)/pW_n(k) \xrightarrow{\sim} k$, et est caractérisé à isomorphisme unique près par ces propriétés; on a $W(k)=\varprojlim W_n(k)$. L'automorphisme de Frobenius de k induit, par fonctorialité, un automorphisme σ de $W(k)$ (resp. $W_n(k)$), donné par $\sigma(a_0, a_1, \ldots)=(a_0^p, a_1^p, \ldots)$.

1.4. Soit A une catégorie abélienne. Pour $n \in \mathbf{Z}$, le tronqué $\tau_{\leqq n}L$ d'un complexe L de A est le sous-complexe de L de composantes L^i pour $i<n$, $\operatorname{Ker}(d)$ pour $i=n$, et 0 pour $i>n$. On a $H^i\tau_{\leqq n}L=H^iL$ (resp. 0) si $i \leqq n$ (resp. $i>n$). On pose $\tau_{<n}L:=\tau_{\leqq n-1}L$. On définit dualement $\tau_{\geqq n}L$, un quotient de L avec $H^i\tau_{\geqq n}L=H^iL$ (resp. 0) si $i \geqq n$ (resp. $i<n$).

Le décalé $L[n]$ est le complexe de composantes $L[n]^i=L^{i+n}$ et de différentielle $d_{L[n]}=(-1)^n d_L$. Pour M un objet de A, on note encore M le complexe réduit à M placé en degré 0; $M[n]$ est alors le complexe réduit à M placé en degré $-n$.

1.5. Si X est un schéma, on note $D(X):=D(X, \mathcal{O}_X)$ la catégorie dérivée de la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules.

1.6. Soient $\tilde{S}$ un schéma et S un sous-schéma fermé défini par un idéal de carré nul. Si X est un S-schéma plat, on dit que X est *relevable* sur $\tilde{S}$ si X admet un relèvement sur $\tilde{S}$, i.e. un $\tilde{S}$-schéma plat $\tilde{X}$ muni d'un isomorphisme $\tilde{X} \times_{\tilde{S}} S \xrightarrow{\sim} X$; si X est lisse sur S, $\tilde{X}$ est automatiquement lisse sur $\tilde{S}$.

2. Décomposition du complexe de de Rham et applications (cas d'un corps parfait)

Théorème 2.1. *Soient k un corps parfait de caractéristique $p>0$, $S=\operatorname{Spec}(k)$, $\tilde{S}=\operatorname{Spec}(W_2(k))$ (1.3), et soit X un S-schéma lisse. A tout $\tilde{S}$-schéma lisse $\tilde{X}$ relevant X est associé canoniquement un isomorphisme*

$$\varphi_{\tilde{X}}: \bigoplus_{i<p} \Omega^i_{X'/S}[-i] \xrightarrow{\sim} \tau_{<p} F_* \Omega^{\cdot}_{X/S}$$

de $D(X')$, tel que $\mathcal{H}^i \varphi_{\tilde{X}}=C^{-1}$ (1.2) pour $i<p$.

La démonstration va se faire en quatre étapes.

(a) *Réduction à la définition de $\varphi^1_{\tilde{X}}$.* La donnée de $\varphi_{\tilde{X}}$ équivaut à la donnée, pour $i<p$, d'une flèche $\varphi^i_{\tilde{X}}: \Omega^i_{X'/S}[-i] \to F_* \Omega^{\cdot}_{X/S}$ dans $D(X')$ telle que $\mathcal{H}^i \varphi^i_{\tilde{X}}=C^{-1}$. La flèche $\varphi^0_{\tilde{X}}$ est nécessairement la composée

$$\mathcal{O}_{X'} \xrightarrow{C^{-1}} \mathcal{H}^0 F_* \Omega^{\cdot}_{X/S} \hookrightarrow F_* \Omega^{\cdot}_{X/S}.$$

Supposons définie $\varphi^1_{\tilde{X}}$ telle que $\mathcal{H}^1 \varphi^1_{\tilde{X}}=C^{-1}$. Pour $i \geqq 1$, considérons l'application produit

$$(\Omega^1_{X'/S})^{\otimes i} \to \Omega^i_{X'/S}, \quad \omega_1 \otimes \ldots \otimes \omega_i \mapsto \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_i;$$

pour $i<p$, celle-ci admet la section «antisymétrisation» a, donnée par

$$a(\omega_1\wedge\ldots\wedge\omega_i)=(1/i!)\sum_{s\in\mathfrak{S}_i}\mathrm{sgn}(s)\omega_{s(1)}\otimes\ldots\otimes\omega_{s(i)}.$$

Pour $1\leqq i<p$, définissons $\varphi^i_{\tilde X}$ comme la flèche composée

$$\begin{tikzcd}
(\Omega^1_{X'/S})^{\otimes i}[-i] \arrow[r, "(\varphi^1_{\tilde X})^{\otimes i}"] & (F_*\Omega^{\boldsymbol{\cdot}}_{X/S})^{\otimes i} \arrow[d, "\text{produit}"] \\
\Omega^i_{X'/S}[-i] \arrow[u, "{a[-i]}"] \arrow[r, "\varphi^i_{\tilde X}"] & F_*\Omega^{\boldsymbol{\cdot}}_{X/S}.
\end{tikzcd}$$

Il résulte de la propriété multiplicative de l'isomorphisme de Cartier que $\mathscr{H}^i\varphi^i_{\tilde X}=C^{-1}$, et $\varphi_{\tilde X}=\sum_{i<p}\varphi^i_{\tilde X}$, avec $\varphi^0_{\tilde X}$ comme ci-dessus, répond à la question. Il suffit donc de définir $\varphi^1_{\tilde X}:\Omega^1_{X'/S}[-1]\to F_*\Omega^{\boldsymbol{\cdot}}_{X/S}$ tel que $\mathscr{H}^1\varphi^1_{\tilde X}=C^{-1}$, ce que nous ferons dans les trois étapes suivantes.

(b) *Cas où $F:X\to X'$ se relève.* Soit $\tilde X'$ le S-schéma déduit de $\tilde X$ par le changement de base $\sigma:\tilde S\to\tilde S$ (1.3). Supposons donné un $\tilde S$-morphisme $\tilde F:\tilde X\to\tilde X'$ relevant F. Comme $F^*:\Omega^1_{X'/S}\to F_*\Omega^1_{X/S}$ est nul, l'image de $\tilde F^*:\Omega^1_{\tilde X'/\tilde S}\to\tilde F_*\Omega^1_{\tilde X/\tilde S}$ est contenue dans $p\tilde F_*\Omega^1_{\tilde X/\tilde S}$. La multiplication par p induisant un isomorphisme $\boldsymbol{p}:F_*\Omega^1_{X/S}\xrightarrow{\sim}p\tilde F_*\Omega^1_{\tilde X/\tilde S}$, il existe donc une unique flèche

$$f=p^{-1}\tilde F^*:\Omega^1_{X'/S}\to F_*\Omega^1_{X/S}$$

rendant commutatif le carré

$$\begin{tikzcd}
\Omega^1_{\tilde X'/\tilde S} \arrow[r, "\tilde F^*"] \arrow[d] & p\tilde F_*\Omega^1_{\tilde X/\tilde S} \\
\Omega^1_{X'/S} \arrow[r, "f"] & F_*\Omega^1_{X/S}. \arrow[u, "\boldsymbol{p}"', "\simeq"]
\end{tikzcd}$$

Si x est une section locale de $\mathcal{O}_{\tilde X}$, de réduction $x_0 \bmod p$, on a

(1) $$\tilde F^*(x\otimes 1)=x^p+\boldsymbol{p}u(x)$$

avec $u(x)$ section de $\mathcal{O}_{\tilde X}$ (et $\boldsymbol{p}:\mathcal{O}_X\xrightarrow{\sim}p\mathcal{O}_{\tilde X}=$ multiplication par p), et

(2) $$f(dx_0\otimes 1)=x_0^{p-1}dx_0+du(x).$$

En particulier, on a

(3) $$df=0,$$

de sorte que f définit un morphisme de complexes

$$f:\Omega^1_{X'/S}[-1]\to F_*\Omega^{\boldsymbol{\cdot}}_{X/S},$$

tel que $\mathscr{H}^1f=C^{-1}$ d'après (2).

(c) *Homotopies.* Soit, pour $i=1,2$, $\tilde F_i:\tilde X\to\tilde X'$ un $\tilde S$-morphisme relevant F. Alors $\tilde F_2^*-\tilde F_1^*:\mathcal{O}_{\tilde X'}\to p\tilde F_*\mathcal{O}_{\tilde X}=\boldsymbol{p}F_*\mathcal{O}_X$ est une dérivation, qui détermine une application

$\mathcal{O}_{X'}$-linéaire

$$h_{12}:\Omega^1_{X'/S}\to F_*\mathcal{O}_X$$

rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{\tilde{X}'} \arrow[r, "\tilde{F}_2^*-\tilde{F}_1^*"] \arrow[d] & p\tilde{F}_*\mathcal{O}_{\tilde{X}} \\
\mathcal{O}_{X'} \arrow[d, "d"'] & \\
\Omega^1_{X'/S} \arrow[r, "h_{12}"] & F_*\mathcal{O}_X . \arrow[uu, "p", "\simeq"']
\end{tikzcd}$$

Si, pour x comme en (b), $\tilde{F}_i^*(x\otimes 1)=x^p+pu_i(x)$, alors

$$h_{12}(dx_0\otimes 1)=u_2(x)-u_1(x),$$

d'où, compte tenu de (2),

$$f_2-f_1=dh_{12}, \tag{4}$$

où $f_i=p^{-1}\tilde{F}_i^*:\Omega^1_{X'/S}\to F_*\Omega^1_{X/S}$.

Si, pour $i=1,2,3$, $\tilde{F}_i:\tilde{X}\to\tilde{X}'$ est un S-morphisme relevant F, et h_{ij} correspond à $\tilde{F}_j-\tilde{F}_i$, alors on a

$$h_{12}+h_{23}=h_{13}. \tag{5}$$

(d) *Cas général.* Comme X'/S est lisse, F admet, localement pour la topologie de Zariski sur X, un relèvement $\tilde{F}$ [(SGA 1 III) ou (EGA IV § 17)]. On peut donc trouver un recouvrement ouvert $\mathcal{U}=(U_i)_{i\in I}$ de X, et, pour chaque i, un S-morphisme $\tilde{F}_i:\tilde{U}_i\to\tilde{U}'_i$ relevant F ($X, X', \tilde{X}, \tilde{X}'$ ont mêmes espaces sous-jacents, on note $\mathcal{U}', \tilde{\mathcal{U}}, \tilde{\mathcal{U}}'$ les recouvrements ouverts de $X', \tilde{X}, \tilde{X}'$ déduits de $\mathcal{U}$). Soient, comme en (b) et (c),

$$f_i=p^{-1}\tilde{F}_i^*:\Omega^1_{X'/S}|U'_i\to F_*\Omega^1_{U_i/S},$$

et, sur $U'_{ij}=U'_i\cap U'_j$, $h_{ij}:\Omega^1_{X'/S}|U'_{ij}\to F_*\Omega^1_{U_{ij}/S}$ correspondant à $\tilde{F}_j^*-\tilde{F}_i^*$. On a

$$df_i=0,\quad f_j-f_i=dh_{ij}\ (\text{sur } U'_{ij}),\quad h_{ij}+h_{jk}=h_{ik}\ (\text{sur } U'_{ijk}=U'_i\cap U'_j\cap U'_k). \tag{6}$$

Soit $\check{\mathscr{C}}(\mathcal{U},\Omega^{\cdot}_{X/S})$ le complexe simple associé au double complexe de Čech de $\Omega^{\cdot}_{X/S}$, défini comme suit. Posons $\Delta_n=\{0,\dots,n\}$, et, pour $s:\Delta_n\to I$, notons U_s l'intersection des $U_{s(n)}$ et j_s l'inclusion de U_s dans X. La composante de degré n de $\check{\mathscr{C}}(\mathcal{U},\Omega^{\cdot}_{X/S})$ est

$$\check{\mathscr{C}}(\mathcal{U},\Omega^{\cdot}_{X/S})^n=\bigoplus_{a+b=n}\check{\mathscr{C}}^b(\mathcal{U},\Omega^a_{X/S}),$$

où $\check{\mathscr{C}}^b(\mathcal{U},\Omega^a_{X/S})$ est le produit, étendu aux $s:\Delta_b\to I$, des $j_{s*}j_s^*\Omega^a_{X/S}$. La différentielle de $\check{\mathscr{C}}(\mathcal{U},\Omega^{\cdot}_{X/S})$ est $d=d_1+d_2$, avec $d_1:\check{\mathscr{C}}^b(\mathcal{U},\Omega^a_{X/S})\to\check{\mathscr{C}}^b((\mathcal{U},\Omega^{a+1}_{X/S})$ induit par la différentielle du complexe de de Rham, et $d_2:\check{\mathscr{C}}^b(\mathcal{U},\Omega^a_{X/S})\to\check{\mathscr{C}}^{b+1}(\mathcal{U},\Omega^a_{X/S})$ égal à $(-1)^a\sum(-1)^i\partial_i$. Les morphismes évidents $\Omega^a_{X/S}\to\check{\mathscr{C}}^0(\mathcal{U},\Omega^a_{X/S})$ définissent un quasi-isomorphisme $\Omega^{\cdot}_{X/S}\to\check{\mathscr{C}}(\mathcal{U},\Omega^{\cdot}_{X/S})$, et par suite un quasi-isomorphisme

$$F_*\Omega^{\cdot}_{X/S}\to F_*\check{\mathscr{C}}(\mathcal{U},\Omega^{\cdot}_{X/S}). \tag{7}$$

Définissons

$$\varphi^1_{(\mathscr{U},(\tilde{F}_i))}=(\varphi_1,\varphi_2):\Omega^1_{X'/S}\to F_*\check{\mathscr{C}}(\mathscr{U},\Omega^{\cdot}_{X/S})^1=F_*\check{\mathscr{C}}^1(\mathscr{U},\mathscr{O}_X)\oplus F_*\check{\mathscr{C}}^0(\mathscr{U},\Omega^1_{X/S})$$

par

$$(\varphi_1\omega)(i,j)=h_{ij}(\omega|U'_{ij}),\qquad (\varphi_2\omega)(i)=f_i(\omega|U'_i).$$

Les relations (6) expriment que $d\varphi^1_{(\mathscr{U},(\tilde{F}_i))}=0$, i.e. que $\varphi^1_{(\mathscr{U},(\tilde{F}_i))}$ est un morphisme de complexes

(8) $$\varphi^1_{(\mathscr{U},(\tilde{F}_i))}:\Omega^1_{X'/S}[-1]\to F_*\check{\mathscr{C}}(\mathscr{U},\Omega^{\cdot}_{X/S}).$$

Définissons enfin

(9) $$\varphi^1_{\tilde{X}}:\Omega^1_{X'/S}[-1]\to F_*\Omega^{\cdot}_{X/S}$$

comme la flèche de $D(X')$ composée de (8) et de l'inverse de (7). Vérifions que (9) ne dépend pas du choix de $(\mathscr{U},(\tilde{F}_i))$. Il est clair que (9) ne change pas si l'on remplace $\mathscr{U}$ par un recouvrement plus fin et les $\tilde{F}_i$ par les relèvements induits. Si $(\mathscr{U}=(U_i)_{i\in I},(\tilde{F}_i)_{i\in I})$ et $(\mathscr{V}=(V_i)_{i\in J},(\tilde{F}_i)_{i\in J})$ sont deux choix, les recouvrements $\mathscr{U}$ et $\mathscr{V}$ sont plus fins que $\mathscr{U}\coprod\mathscr{V}$, indexé par $I\coprod J$, et $(\mathscr{U},(\tilde{F}_i)_{i\in I})$ et $(\mathscr{V},(\tilde{F}_i)_{i\in J})$ définissent la même flèche (9) que $(\mathscr{U}\coprod\mathscr{V},(\tilde{F}_i)_{i\in I\coprod J})$.

Il ne reste plus dès lors qu'à montrer que $\mathscr{H}^1\varphi^1_{\tilde{X}}=C^{-1}$. C'est une question locale, donc on peut supposer que F admet un relèvement $\tilde{F}:\tilde{X}\to\tilde{X}'$. La flèche $\varphi^1_{\tilde{X}}$ est alors définie par le morphisme de complexes f de (b), et on a vu que $\mathscr{H}^1 f=C^{-1}$. Ceci termine la démonstration de 2.1.

Remarques 2.2. (i) On n'a pas utilisé réellement l'hypothèse que S est le spectre d'un corps parfait: la démonstration fournit en fait un isomorphisme $\varphi_{\tilde{X}}$ pour S égal à la réduction modulo p d'un schéma $\tilde{S}$ plat sur $\mathbf{Z}/p^2$ muni d'un endomorphisme $F_{\tilde{S}}$ relevant F_S ($\tilde{X}'$ est alors défini comme déduit de $\tilde{X}$ par le changement de base $F_{\tilde{S}}$). Nous étudierons plus loin (3.7) la dépendance de $\varphi^1_{\tilde{X}}$ par rapport à $\tilde{X}$.

(ii) Dans le cas où $F:X\to X'$ admet un relèvement $\tilde{F}:\tilde{X}\to\tilde{X}'$, la flèche $f=p^{-1}\tilde{F}^*$ de (b) ci-dessus se prolonge en un quasi-isomorphisme de complexes de $\mathscr{O}_{X'}$-modules

$$\varphi_{(\tilde{X},\tilde{F})}:\bigoplus_{i\geq 0}\Omega^i_{X'/S}[-i]\to F_*\Omega^{\cdot}_{X/S}$$

induisant C^{-1} sur $\mathscr{H}^i$ (et telle que $\tau_{<p}\varphi_{(\tilde{X},\tilde{F})}$ ait pour image $\varphi_{\tilde{X}}$ dans $D(X')$): il suffit en effet de définir la composante de degré i de $\varphi_{(\tilde{X},\tilde{F})}$,

$$\varphi^i_{(\tilde{X},\tilde{F})}:\Omega^i_{X'/S}\to ZF_*\Omega^i_{X/S}$$

comme C^{-1} pour $i=0$, et, pour $i\geq 1$, comme la composée de $\Lambda^i f:\Omega^i_{X'/S}\to\Lambda^i ZF_*\Omega^1_{X/S}$ et du produit $\Lambda^i ZF_*\Omega^1_{X/S}\to ZF_*\Omega^i_{X/S}$ (Z désignant le noyau de d).

(iii) Les relèvements locaux de F forment un torseur sur X' sous le faisceau $\mathscr{H}om(\Omega^1_{X'/S},F_*\mathscr{O}_X)=\Theta_{X'/S}\otimes F_*\mathscr{O}_X$ des dérivations de X' à valeurs dans $F_*\mathscr{O}$. La classe c de ce torseur dans $H^1(X',\Theta_{X'/S}\otimes F_*\mathscr{O}_X)$ est l'obstruction à l'existence d'un relèvement global $\tilde{F}:\tilde{X}\to\tilde{X}'$ de F. Avec les notations de (d) ci-dessus, et à un signe près dépendant des conventions choisies, c est la classe du cocycle (h_{ij}). Par construction même de $\varphi_{\tilde{X}}^1$, la classe c, considérée comme flèche de $\Omega^1_{X'/S}[-1]$ dans $F_*\mathcal{O}$ dans $D(X')$ n'est autre que la composée de $\varphi^1_{\tilde{X}}$ et de la projection naturelle $F_*\Omega^{\cdot}_{X/S}\to F_*\mathcal{O}_X$, i.e. l'obstruction à représenter $\varphi^1_{\tilde{X}}$ par un morphisme de complexes.

(iv) Supposons que X admette un relèvement formel lisse $X^\wedge$ sur $W(k)$, et soit m un entier $<p-1$. L'isomorphisme ψ_ε du théorème d'Ogus [3, 8.20] donne le tronqué $\tau_{\leqq m}$ de l'isomorphisme $\varphi_{\tilde{X}}$, où $\tilde{X}$ est la réduction de $X^\wedge$ modulo p^2: si ε_m désigne la «jauge» $i\mapsto\langle m-i\rangle$ [3, 8.18.3], le sous-complexe $(\Omega^{\cdot}_{X'^\wedge/W})_{\varepsilon_r}$ de $\Omega^{\cdot}_{X'^\wedge/W}$, pour $r=m,\ m+1$, s'écrit

$$p^r\mathcal{O}_{X'^\wedge}\to p^{r-1}\Omega^1_{X'^\wedge/W}\to\dots;$$

il s'identifie à $Ru_{X'/W*}\mathcal{J}^{[r]}_{X'/W}$; appliquant ψ_ε à $\varepsilon=\varepsilon_m,\ \varepsilon_{m+1}$ et passant au quotient, on obtient la décomposition désirée. C'est cette observation, implicite dans Kato [14, preuve de 2.6.1], qui est à l'origine du présent article.

Si X est de dimension $N<p$, l'isomorphisme ψ_{ε_N} fournit d'ailleurs, pour tout entier $n\geqq 1$, un analogue de la décomposition de 2.1 pour le complexe de de Rham $\Omega^{\cdot}_{X_n}$ de $X_n/W_n(k)$, où X_n est la réduction de $X^\wedge$ modulo p^n. Plus précisément, notons W_nX le schéma ayant même espace sous-jacent que X et annelé par le faisceau $W_n\mathcal{O}_X$ des vecteurs de Witt de longueur n sur $\mathcal{O}_X$. L'homomorphisme d'anneaux

$$W_n\mathcal{O}_X\to\mathcal{O}_{X_n},\qquad (a_0,\dots,a_{n-1})\mapsto\tilde{a}_0^{p^{n-1}}+p\tilde{a}_1^{p^{n-2}}+\dots+p^{n-1}\tilde{a}_{n-1},$$

où $\tilde{a}_i$ relève a_i, permet de considérer les composantes de $\Omega^{\cdot}_{X_n}$ comme des modules sur W_nX. L'endomorphisme de Frobenius de $W_n\mathcal{O}_X$ définit un morphisme de Frobenius relatif $W_nX\to W_nX'$, qui est un $W_n(k)$-morphisme. Le complexe $F_*\Omega^{\cdot}_{X_n}$ sur W_nX' est à différentielle linéaire. Soit X'_n déduit de X_n par l'extension des scalaires $\sigma: W_n(k)\xrightarrow{\sim}W_n(k)$ (1.3), et notons $(\Omega^*_{X'_n}, pd)$ le complexe déduit du complexe de de Rham de $X'_n/W_n(k)$ par multiplication par p de la différentielle. C'est aussi un complexe de modules, à différentielle linéaire, sur W_nX'. La construction de l'isomorphisme ψ_{ε_N} donne, par réduction modulo p^n, un isomorphisme de $D(W_nX')$:

$$\varphi_{X^\cdot}:(\Omega^*_{X'_n}, pd)\xrightarrow{\sim}F_*\Omega^{\cdot}_{X_n}. \tag{2.2.1}$$

Pour $n=1$, $X_1=X$, $(\Omega^*_{X'_n}, pd)=\bigoplus_i\Omega^i_{X'/k}[-i]$ et (2.2.1) coïncide avec φ_{X_2}. Nous renvoyons aux articles de Fontaine-Messing [10] et Kato [14] pour des variantes et applications de (2.2.1), notamment à la dégénérescence de la suite spectrale de Hodge de $X_n/W_n(k)$ pour X propre sur k.

Corollaire 2.3. *Avec les notations de* 2.1, *soit* X *un* k-*schéma lisse de dimension* $\leqq p$, *relevable sur* $W_2(k)$. *Alors le complexe* $F_*\Omega^{\cdot}_{X/S}$ *est isomorphe, dans* $D(X')$, *à un complexe à différentielle nulle.*

La conclusion signifie encore que $F_*\Omega^{\cdot}_{X/S}$ est isomorphe, dans $D(X')$, à la somme de ses $\mathcal{H}^i[-i]$, ou qu'il existe, dans $D(X')$, un isomorphisme

$$\bigoplus\Omega^i_{X'/S}[-i]\xrightarrow{\sim}F_*\Omega^{\cdot}_{X/S}$$

induisant C^{-1} sur $\mathcal{H}^i$ (cf. 3.1 ci-après).

Prouvons 2.3. On se ramène à supposer X connexe. Si $\dim X < p$, il suffit d'appliquer 2.1. Supposons donc que $\dim X = p$. Sur X, les faisceaux localement libres $\Omega^i_{X/S}$ et $\Omega^{p-i}_{X/S}$ sont en dualité de Serre: le produit $\alpha \wedge \beta$ est une dualité parfaite, à valeurs dans $\Omega^p_{X/S}$, entre $\Omega^i_{X/S}$ et $\Omega^{p-i}_{X/S}$. Le morphisme $F = F_{X/S}$ étant fini et plat, il en résulte, par la dualité de Grothendieck, que $F_*\Omega^i_{X/S}$ et $F_*\Omega^{p-i}_{X/S}$ sont encore en dualité (à valeurs dans $\Omega^p_{X'/S}$), donnée par l'accouplement $(\alpha, \beta) \mapsto C(\alpha \wedge \beta)$, où l'on désigne ici par $C: F_*\Omega^p_{X/S} \to \Omega^p_{X'/S}$ le composé de $F_*\Omega^p_{X/S} \to \mathscr{H}^p F_*\Omega^\cdot_{X/S}$ et de l'inverse de C^{-1} en degré p (1.2): le point est que C n'est autre que le morphisme trace. Il est d'ailleurs facile de vérifier directement que cet accouplement est parfait. Le transposé, pour cette dualité, de la différentielle d de $F_*\Omega^\cdot_{X/S}$ est encore d (à un signe dépendant des conventions près). Ceci exprime que

$$C(d\alpha \wedge \beta) \pm C(\alpha \wedge d\beta) = C(d(\alpha \wedge \beta)) = 0.$$

D'après 2.1, $\tau_{<p} F_*\Omega^\cdot_{X/S}$ est isomorphe, dans $D(X')$, à la somme de ses $\mathscr{H}^i[-i]$. Par dualité, $\tau_{\geqq 1} F_*\Omega^\cdot_{X/S}$ a la même propriété. On dispose d'un triangle distingué

$$(*) \qquad \tau_{<p} F_*\Omega^\cdot_{X/S} \to F_*\Omega^\cdot_{X/S} \to \mathscr{H}^p[-p] \xrightarrow{e}.$$

Puisque $\tau_{<p} F_*\Omega^\cdot_{X/S}$ est somme de ses $\mathscr{H}^i[-i]$, la conclusion de 2.3 équivaut à la nullité de

$$e: \mathscr{H}^p[-p] \to \Big(\bigoplus_{i<p} \mathscr{H}^i[-i]\Big)[1].$$

Soient e_i $(0 \leqq i \leqq p-1)$ les composantes de e:

$$e_i \in \mathrm{Hom}(\mathscr{H}^p[-p], \mathscr{H}^i[-i+1]) = H^{p-i+1}(X', \mathscr{H}om(\mathscr{H}^p, \mathscr{H}^i)).$$

Le triangle $(*)$ s'envoie dans le triangle

$$\tau_{[1,p-1]} F_*\Omega^\cdot_{X/S} \to \tau_{\geqq 1} F_*\Omega^\cdot_{X/S} \to \mathscr{H}^p[-p] \to,$$

où $\tau_{[1,p-1]} = \tau_{\geqq 1}\tau_{<p} = \tau_{<p}\tau_{\geqq 1}$. Comme $\tau_{\geqq 1} F_*\Omega^\cdot_{X/S}$ est somme de ses $\mathscr{H}^i[-i]$, on a donc $e_i = 0$ pour $i \neq 0$. Pour $i = 0$, la classe e_i vit dans $H^{p+1}(X', \ldots)$, et ce groupe est nul car $\dim X = p$.

Corollaire 2.4. *Avec les notations de 2.1, soit X un k-schéma propre et lisse de dimension $\leqq p$, relevable sur $W_2(k)$. Alors la suite spectrale de Hodge vers de Rham*

$$(2.4.1) \qquad E_1^{ij} = H^j(X, \Omega^i) \Rightarrow H^*_{DR}(X/k)$$

dégénère en E_1.

Comme les $H^j(X, \Omega^i)$ sont des k-espaces vectoriels de dimension finie, la conclusion signifie que l'on a, pour tout n,

$$\sum_{i+j=n} \dim H^j(X, \Omega^i) = \dim H^n_{DR}(X/k).$$

D'après 2.3, on dispose d'un isomorphisme de $D(X')$

$$\bigoplus \Omega^i_{X'/S}[-i] \xrightarrow{\sim} F_*\Omega^\cdot_{X/S}.$$

On en déduit, pour tout n, un isomorphisme

$$\bigoplus_i H^{n-i}(X', \Omega^i_{X'/S}) \tilde{\to} H^n(X', F_* \Omega^{\cdot}_{X/S}).$$

Or, comme F est fini, on a $H^n(X', F_*\Omega^{\cdot}_{X/S}) = H^n(X, \Omega^{\cdot}_{X/S})$. D'autre part, X' étant déduit de X par une extension du corps des scalaires, on a $\dim H^{n-i}(X', \Omega^i_{X'/S}) = \dim H^{n-i}(X, \Omega^i_{X/S})$, d'où la conclusion.

Corollaire 2.5. *Avec les notations de* 2.1, *soit X un k-schéma propre et lisse relevable sur $W_2(k)$. Alors la suite spectrale de Hodge vers de Rham vérifie $E_1^{ij} = E_\infty^{ij}$ pour $i+j<p$.*

La conclusion signifie que, pour $n<p$, on a

$$\sum_{i+j=n} \dim H^j(X, \Omega^i) = \dim H^n_{DR}(X/k).$$

La suite exacte courte de complexes

$$0 \to \tau_{<p} F_* \Omega^{\cdot}_X \to F_* \Omega^{\cdot}_X \to F_* \Omega^{\cdot}_X / \tau_{<p} F_* \Omega^{\cdot}_X \to 0$$

fournit, pour $n<p$, un isomorphisme

$$H^n(X', \tau_{<p} F_* \Omega^{\cdot}_X) \tilde{\to} H^n(X', F_* \Omega^{\cdot}_X) = H^n_{DR}(X/k).$$

Appliquant 2.2, on obtient, pour $n<p$,

$$\bigoplus_i H^{n-i}(X', \Omega^i_{X'}) \tilde{\to} H^n(X', F_* \Omega^{\cdot}_X)$$

et on conclut comme en 2.4.

Voir 4.1.4 pour des généralisations de 2.4 et 2.5.

Remarques 2.6. (i) Mumford [22] a donné des exemples de surfaces projectives lisses X/k possédant des 1-formes globales non fermées. D'autres exemples ont été données ultérieurement par Lang [19], Raynaud et Szpiro [11]. Ces surfaces ne se relèvent donc pas sur $W_2(k)$. Il en est de même, pour $p=2$, des surfaces d'Enriques de type α_2, pour lesquelles la différentielle $d_1 : H^1(\mathcal{O}) \to H^1(\Omega^1)$ est non nulle (cf. par exemple [13, II 7.3.8]). Voir aussi Suwa [26] pour une interprétation de la condition de dégénérescence de (2.4.1) en E_1 en termes de la structure de $\mathrm{Pic}^\tau/\mathrm{Pic}^0$ pour les surfaces telles que

$$\chi(\mathcal{O}) - 1 + (b_1/2) = 0.$$

(ii) Sous les hypothèses de 2.4, il n'est pas vrai en général que la symétrie de Hodge $h^{ij} = h^{ji}$ soit valable (où $h^{ij} = \dim H^j(X, \Omega^i)$), cf. Serre [25, § 20].

(iii) Si X est un k-schéma lisse de dimension $\geqq p+1$, relevable en un schéma lisse sur $W_2(k)$ (voire en un schéma formel lisse sur $W(k)$), il n'est sans doute pas vrai en général que $F_* \Omega^{\cdot}_{X/k}$ soit encore somme, dans $D(X')$, de ses $\mathcal{H}^i[-i]$. Nous n'avons toutefois pas de contre-exemple. Nous ignorons même si, pour un tel X, supposé de plus propre, la suite spectrale de Hodge vers de Rham dégénère en E_1.

(iv) Si X est un k-schéma lisse, nous dirons que le complexe $F_*\Omega^{\cdot}_{X/k}$ est *décomposable* s'il est somme, dans $D(X')$, de ses $\mathscr{H}^i[-i]$ (cf. 3.1). Si $F_*\Omega^{\cdot}_{X/k}$ est décomposable, il en est de même de $F_*\Omega^{\cdot}_{Y/k}$ pour Y étale sur X. Si $F_*\Omega^{\cdot}_{X/k}$ et $F_*\Omega^{\cdot}_{Y/k}$ sont décomposables, $F_*\Omega^{\cdot}_{(X\times Y)/k}$ l'est également. Si pour tout n le morphisme naturel $\otimes^n\Omega^1_{X'/k}\to\Omega^n_{X'/k}$ admet une section, et que X se relève sur $W_2(k)$, un argument analogue à celui de 2.1 (a) montre encore que $F_*\Omega^{\cdot}_{X/k}$ est décomposable; ceci s'applique si X est une variété abélienne sur k (la décomposabilité de $F_*\Omega^{\cdot}_{X/k}$ dans ce cas nous a été signalée par M. Raynaud, avec une autre démonstration).

Corollaire 2.7. *Soient K un corps de caractéristique 0 et X un K-schéma propre et lisse. Alors la suite spectrale de Hodge vers de Rham*

(2.7.1) $$E_1^{ij}=H^j(X,\Omega^i) \Rightarrow H^*_{DR}(X/K)$$

dégénère en E_1.

La conclusion signifie encore que l'on a, pour tout n,

(*) $$\sum_{i+j=n} h^{ij}=h^n,$$

où $h^{ij}=\dim H^j(X,\Omega^i)$ et $h^n=\dim H^n_{DR}(X/K)$. On peut supposer X connexe, soit d sa dimension. Des arguments standard montrent qu'il existe un anneau A intègre de type fini sur $\mathbf{Z}$, un morphisme propre et lisse $f:\mathscr{X}\to\operatorname{Spec}(A)$, de dimension relative d, et un homomorphisme $A\to K$ tels que $X=\mathscr{X}\otimes_A K$. Les faisceaux $R^jf_*\Omega^i_{\mathscr{X}/A}$, $R^nf_*\Omega^{\cdot}_{\mathscr{X}/A}$ sont cohérents, donc, quitte à remplacer A par $A[s^{-1}]$ pour $s\in A$ convenable, on peut supposer qu'il sont localement libres (donc de formation compatible à tout changement de base), et de rangs constants, h^{ij} et h^n respectivement. Soit T l'adhérence schématique, dans $\operatorname{Spec}(A)$, d'un point fermé de $\operatorname{Spec}(A\otimes\mathbf{Q})$; c'est un schéma quasi-fini et plat sur $\operatorname{Spec}(\mathbf{Z})$. Choisissons un point fermé s de T en lequel T est étale sur $\mathbf{Z}$, et tel que la caractéristique p du corps fini $k=k(s)$ soit $\geqq d$. Si $\mathcal{O}_s$ désigne l'anneau local de T en s, son idéal maximal $\mathfrak{m}_s$ est engendré par p, et $\mathcal{O}_s/\mathfrak{m}_s^2=W_2(k)$. Le schéma $\mathscr{X}\otimes_A(\mathcal{O}_s/\mathfrak{m}_s^2)$ est un relèvement lisse de $\mathscr{X}_s=\mathscr{X}\otimes_A k(s)$. Vu l'hypothèse faite plus haut, on a $\dim_{k(s)}H^j(\mathscr{X}_s,\Omega^i)=h^{ij}$, et $\dim_{k(s)}H^n_{DR}(\mathscr{X}_s/k(s))=h^n$. Mais, comme $d\leqq p$, la relation (*) est satisfaite d'après 2.4.

Corollaire 2.8 (Raynaud). *Avec les notations de 2.1, soit X un k-schéma projectif et lisse, purement de dimension d, relevable sur $W_2(k)$, et soit L un faisceau inversible sur X. On fait l'une des deux hypothèses suivantes:*

(i) *L est ample;*

(ii) *$d=2$ et L est numériquement positif (i.e. on a $L\cdot L>0$ et $L\cdot\mathcal{O}(D)\geqq 0$ pour tout diviseur effectif D sur X).*

Alors on a:

(2.8.1) $$H^j(X,\Omega^i\otimes L)=0 \quad \text{pour} \quad i+j>\sup(d,2d-p),$$

(2.8.2) $$H^j(X,\Omega^i\otimes L^{-1})=0 \quad \text{pour} \quad i+j<\inf(d,p).$$

Noter que (2.8.1) et (2.8.2) sont équivalents par dualité de Serre.

Le coeur de la démonstration est le lemme suivant:

Lemme 2.9. *Soient X un k-schéma lisse, M un faisceau inversible sur X et b un entier. Supposons que $\tau_{<b}F_*\Omega^{\cdot}_X$ soit isomorphe, dans $D(X')$, à un complexe à différentielle nulle, et que*

$$(*) \qquad H^j(X, \Omega^i_X \otimes M^{\otimes p}) = 0 \quad pour \quad i+j<b.$$

Alors on a

$$H^j(X, \Omega^i_X \otimes M) = 0 \quad pour \quad i+j<b.$$

Soit M' sur X' déduit de M par changement de base. On a $F^*M' = M^{\otimes p}$, d'où, par la formule de projection,

$$H^j(X, M^{\otimes p} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^i_X) = H^j(X', M' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} F_*\Omega^i_X)$$

pour tout (i,j). Comme $F_*\Omega^{\cdot}_X$ est un complexe de $\mathcal{O}_{X'}$-modules (à différentielle $\mathcal{O}_{X'}$-linéaire), on peut considérer le produit tensoriel $M' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} F_*\Omega^{\cdot}_X$, et on a une suite spectrale

$$E_1^{ij} = H^j(X', M' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} F_*\Omega^i_X) \Rightarrow H^{i+j}(X', M' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} F_*\Omega^{\cdot}_X).$$

L'hypothèse $(*)$ implique donc que $H^n(X', M' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} F_*\Omega^{\cdot}_X) = 0$ pour $n<b$. Mais, pour $n<b$, on a

$$H^n(X', M' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} F_*\Omega^{\cdot}_X) = H^n(X', M' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \tau_{<b}F_*\Omega^{\cdot}_X).$$

Or on dispose, par hypothèse, d'un isomorphisme de $D(X')$

$$\bigoplus_{i<b} \Omega^i_{X'}[-i] \xrightarrow{\sim} \tau_{<b}F_*\Omega^{\cdot}_X.$$

Par suite, pour $n<b$, on a

$$0 = H^n(X', M' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} F_*\Omega^{\cdot}_X) = \bigoplus_i H^{n-i}(X', M' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \Omega^i_{X'}).$$

Puisque (X', M') se déduit de (X, M) par le changement de base $F_S: S \xrightarrow{\sim} S$, on a aussi

$$H^{n-i}(X, M \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^i_X) = 0$$

pour $n<b$ et tout i.

Prouvons (2.8.2). D'après 2.1, pour $b \leqq p$, $\tau_{<b}F_*\Omega^{\cdot}_X$ est isomorphe, dans $D(X')$, à un complexe à différentielle nulle. Sous l'hypothèse (i), on a $H^j(X, \Omega^i_X \otimes L^{\otimes(-N)}) = 0$ pour N assez grand et $j<d$, en particulier pour $N = p^n$ avec n assez grand et $i+j<d$. Soit M le dual de L. Appliquant 2.9 aux $M^{\otimes p^n}$ et à $b = \inf(p, d)$, on obtient (2.8.2) à l'issue d'une récurrence descendante sur n. Sous l'hypothèse (ii), on a encore $H^j(X, \Omega^i_X \otimes L^{\otimes(-N)}) = 0$ pour N assez grand et $i+j<2$. En effet, c'est trivial pour $i=j=0$; pour $j=1$, $i=0$, l'assertion est due à Szpiro [21, Prop. 2]; enfin, pour $j=0$, $i=1$, elle découle du fait que, par Riemann-Roch, la dimension de $H^0(X, L^{\otimes N})$ tend vers l'infini quand N tend vers l'infini. On conclut alors comme dans le cas (i).

Remarques 2.10. (i) L'idée d'obtenir des résultats d'annulation par récurrence descendante sur des Frobeniusés est due à Szpiro (cf. [27, 28, 21]). Par ailleurs, Esnault et Viehweg [7] ont montré récemment que, sur $\mathbf{C}$, il existe un lien étroit entre la dégénérescence en E_1 de certaines suites spectrales de type «Hodge vers de Rham» et des théorèmes d'annulation à la Kodaira.

(ii) Raynaud [24] et Szpiro [9] ont construit des exemples de couples (X, L), où X/k est une surface projective lisse et L un faisceau inversible ample sur X tels que $H^1(X, L^{-1}) \neq 0$. Ces surfaces ne se relèvent donc pas sur $W_2(k)$.

(iii) Soit X un k-schéma lisse. On verra en 3.6 que si X ne se relève pas sur $W_2(k)$, alors $\tau_{\leqq 1} F_* \Omega^{\cdot}_{X/k}$ – et a fortiori $F_* \Omega^{\cdot}_{X/k}$ – n'est pas isomorphe, dans $D(X')$, à un complexe à différentielle nulle. Cette «pathologie» peut être invisible au niveau de la suite spectrale de Hodge ou d'énoncés d'annulation à la Kodaira: pour $p \geqq 7$, Raynaud sait construire, par la méthode de Godeaux-Serre [25], une surface X lisse et projective sur $\mathbf{F}_p$, ne se relevant pas sur $\mathbf{Z}/p^2$, et telle que: a) la suite spectrale de Hodge vers de Rham de X dégénère en E_1 b) tout faisceau inversible ample sur X satisfait au théorème d'annulation de Kodaira-Akizuki-Nakano.

Corollaire 2.11 (Kodaira-Akizuki-Nakano [1, 18], Ramanujam [23]). *Soient K un corps de caractéristique* 0, *X un K-schéma projectif lisse, purement de dimension d, et L un faisceau inversible sur X. On suppose que L est ample, ou que $d=2$ et que L est numériquement positif. Alors on a*

$$H^j(X, \Omega^i \otimes L) = 0 \quad \textit{pour} \quad i+j>d$$

(ou, ce qui revient au même, par dualité de Serre, $H^j(X, \Omega^i \otimes L^{-1}) = 0$ pour $i+j<d$).

On déduit 2.11 de 2.8 comme on a déduit 2.6 de 2.1; nous omettrons les détails (pour le cas numériquement positif, cf. [21, p. 42]).

Corollaire 2.12 («*Lefschetz faible*», cf. Berthelot [2]). *Avec les notations de* 2.1, *soit X un k-schéma projectif et lisse purement de dimension d, et $D \subset X$ un diviseur lisse. On suppose X et D relevables sur $W_2(k)$ et D ample. Alors la flèche de restriction $H^n_{DR}(X/k) \to H^n_{DR}(D/k)$ est un isomorphisme pour $n < \inf(p, d) - 1$ et une injection pour $n = \inf(p, d) - 1$.*

Le noyau $\Omega^{\cdot}_X(\log D)(-D)$ de $\Omega^{\cdot}_X \to \Omega^{\cdot}_D$ [cf. 4.2.2 (c)] admet un dévissage («filtration par le poids»)

$$0 \to \Omega^{\cdot}_X(-D) \to \Omega^{\cdot}_X(\log D)(-D) \to \Omega^{\cdot -1}_D(-D) \to 0 .$$

La conclusion de 2.12 signifie que

$$H^n(X, \Omega^{\cdot}_X(\log D)(-D)) = 0 \quad \text{pour} \quad n < \inf(p, d) .$$

On applique 2.8 à $(X, \mathcal{O}_X(D))$ et $(D, \mathcal{O}_D(D))$.

3. Gerbes de relèvements et de scindages, et décomposition du complexe de de Rham (cas général)

3.1. Soit A une catégorie abélienne. Nous dirons qu'un objet K de $D^b(A)$ est *décomposable* si K est isomorphe (dans $D^b(A)$) à un complexe à différentielle nulle.

Pour que K soit décomposable, il faut et il suffit qu'il existe, dans $D(A)$, des morphismes $f_i: H^iK[-i] \to K$ tels que $H^i(f_i)$ soit l'application identique de H^iK (cette condition est nécessaire, car vérifiée par $\bigoplus H^iK[-i]$, et suffisante, car les f_i induisent un isomorphisme $\bigoplus H^iK[-i] \xrightarrow{\sim} K$). Si K est décomposable, on appelle *décomposition* de K un morphisme $f=\sum f_i: \bigoplus H^iK[-i] \to K$ tel que H^if soit l'application identique de H^iK.

Soit K un complexe décomposable tel que $K^i=0$ pour $i \neq 0, 1$. Une décomposition de K est entièrement déterminée par la donnée de $f_1: H^1K[-1] \to K$ tel que H^1f_1 soit l'identité (f_0 est donné par l'injection $H^0K \hookrightarrow K^0$). Le triangle distingué

$$H^0K \to K \to H^1K[-1] \to$$

fournit la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Hom}(H^1K[-1], H^0K) \to \mathrm{Hom}(H^1K[-1], K) \xrightarrow{a} \mathrm{Hom}(H^1K, H^1K),$$

qui montre que l'ensemble des décompositions de K est un espace affine sous $\mathrm{Hom}(H^1K[-1], H^0K) = \mathrm{Ext}^1(H^1K, H^0K)$ (image inverse par a de Id).

3.2. Soient $(T, \mathcal{O})$ un site annelé et K un complexe de $\mathcal{O}$-modules sur T avec $K^i=0$ pour $i \neq 0, 1$. On suppose que $\mathcal{H}^1K$ est localement libre de rang fini; la projection de K^1 sur $\mathcal{H}^1K$ admet donc localement une section. On suppose en outre que la projection de K^0 sur $\mathrm{Im}(d)$ admet aussi localement une section.

Soit $\mathrm{sc}'(K)$ la catégorie fibrée suivante sur T: un objet sur U est un scindage (sur U) $s: \mathcal{H}^1K \to K^1$ de la projection de K^1 sur $\mathcal{H}^1K$; une flèche de s' dans s'' est un homomorphisme $h: \mathcal{H}^1K \to K^0$ (sur U) tel que $s''=s'+dh$. Si s' et s'' sont deux objets sur U, les morphismes de s' dans s'' forment un faisceau sur U: $\mathrm{sc}'(K)$ est un préchamp (en groupoïdes). De plus, les hypothèses faites sur K impliquent que: a) tout U admet un recouvrement R tel que la catégorie fibre $\mathrm{sc}'(K)(R)$ soit non vide b) deux objets quelconques de $\mathrm{sc}'(K)$ sont localement isomorphes. Le champ associé au préchamp $\mathrm{sc}'(K)$ est donc une gerbe (Giraud [12, III § 2]), la *gerbe des scindages* de K, notée $\mathrm{sc}(K)$.

Pour tout objet s de $\mathrm{sc}(K)$, $\mathcal{H}om(s,s)$ est le faisceau abélien $\mathcal{H}om(\mathcal{H}^1K, \mathcal{H}^0K)$. La gerbe $\mathrm{sc}(K)$ admet un objet global[1] si et seulement si sa classe [12, IV 3.1, 3.5]

$$\mathrm{cl}\,\mathrm{sc}(K) \in H^2(T, \mathcal{H}om(\mathcal{H}^1K, \mathcal{H}^0K)) = \mathrm{Ext}^2(\mathcal{H}^1K, \mathcal{H}^0K)$$

est nulle. Si tel est le cas, l'ensemble des classes à isomorphisme près d'objets globaux de $\mathrm{sc}(K)$ est un espace affine sous $H^1(T, \mathcal{H}om(\mathcal{H}^1K, \mathcal{H}^0K)) = \mathrm{Ext}^1(\mathcal{H}^1K, \mathcal{H}^0K)$ (si s et t sont deux objets globaux, leur «différence» $t-s$ est la classe du torseur des isomorphismes locaux de s sur t, cf. [12, III 2.2.6]).

Notons par ailleurs

$$\mathrm{e}(K) \in \mathrm{Ext}^2(\mathcal{H}^1K, \mathcal{H}^0K)$$

la classe définie par le morphisme de degré 1 du triangle distingué

$$\mathcal{H}^0K \to K \to \mathcal{H}^1K[-1] \xrightarrow{+1}.$$

[1] Voir 3.3 (b) pour une description des objets globaux

On a $\mathrm{e}(K)=0$ si et seulement si K est décomposable (3.1). On a vu d'autre part que, si K est décomposable, l'ensemble des décompositions de K est un espace affine sous $\mathrm{Ext}^1(\mathscr{H}^1K, \mathscr{H}^0K)$.

Proposition 3.3. *Avec les notations précédentes:* (a) *On a*

$$\mathrm{cl}\,\mathrm{sc}(K) = -\mathrm{e}(K).$$

(b) *Il existe une bijection affine canonique α, définie ci-dessous, de l'ensemble des classes à isomorphisme près d'objets globaux de* $\mathrm{sc}(K)$ *sur l'ensemble des décompositions de K, induisant l'identité sur le groupe des translations* $\mathrm{Ext}^1(\mathscr{H}^1K, \mathscr{H}^0K)$.

Prouvons (a). Choisissons un hyperrecouvrement $U_{\bullet}\to T$, sur U_0 une section $f:\mathscr{H}^1K\to K^1$ de la projection de K^1 sur $\mathscr{H}^1K$, et sur U_1, $g:\mathscr{H}^1K\to K^0$ tel que $d_1^*f-d_0^*f=dg$. Alors $h=d_0^*g-d_1^*g+d_2^*g$ est un 2-cocycle de $U_{\bullet}$ à valeurs dans $\mathscr{H}om(\mathscr{H}^1K, \mathscr{H}^0K)$, dont l'image dans $H^2(T, \mathscr{H}om(\mathscr{H}^1K, \mathscr{H}^0K))$ est $\mathrm{cl}\,\mathrm{sc}(K)$ (cf. [12, IV 3.5]). D'autre part, avec la convention de signe de [J.-L. Verdier, Catégories dérivées, Etat 0, p. 269, dans SGA 4 1/2, Springer Lecture Notes 569], $\mathrm{e}(K)$ est la classe du morphisme «composé»

$$\mathscr{H}^1K[-1] \xleftarrow{q} E \xrightarrow{-\mathrm{pr}} \mathscr{H}^0K[1],$$

où

$$E=\left(\mathscr{H}^0K\to K^0 \xrightarrow{d} K^1\right)$$

est le cône (concentré en degrés -1, 0, 1) de $\mathscr{H}^0K\to K$, q le quasi-isomorphisme donné par la projection de K^1 sur $\mathscr{H}^1K$, et pr la projection évidente. Posons $M=\mathscr{H}^0K$, $N=\mathscr{H}^1K$, et notons $\check{N}$ le dual de N. La classe $\mathrm{e}(K)$ est encore l'image de $\mathrm{Id}_N\in H^0(T, \check{N}\otimes N)$ dans $H^2(T, \check{N}\otimes M)=H^2(T, \mathscr{H}om(\mathscr{H}^1K, \mathscr{H}^0K))$ par le morphisme composé

$$H^0(T, \check{N}\otimes N) \underset{\simeq}{\xleftarrow{q}} H^1(T, \check{N}\otimes K) \xrightarrow{-\mathrm{Id}_N\otimes\mathrm{pr}} H^2(T, \check{N}\otimes M).$$

Or

$$c=(h, -g, f)\in \check{C}^1(U_{\bullet}, \check{N}\otimes K)=\check{C}^2(U_{\bullet}, \check{N}\otimes M)\oplus\check{C}^1(U_{\bullet}, \check{N}\otimes K^0)\oplus\check{C}^0(U_{\bullet}, \check{N}\otimes K^1)$$

est un 1-cocycle, d'image Id_N par q, et $-h$ par $-\mathrm{Id}_N\otimes\mathrm{pr}$. Donc $\mathrm{e}(K)=-\mathrm{cl}\,\mathrm{sc}(K)$.

Construisons maintenant α. Soit s un objet global de $\mathrm{sc}(K)$, décrit par un hyperrecouvrement $U_{\bullet}\to T$, sur U_0 une section $f:\mathscr{H}^1K\to K^1$ de la projection de K^1 sur $\mathscr{H}^1K$, et sur U_1, $h:\mathscr{H}^1K\to K^0$ tel que $d_0^*f-d_1^*f=dh$ et $d_0^*h-d_1^*h+d_2^*h=0$. Alors

$$(h, f): \mathscr{H}^1K\to\check{\mathscr{C}}^1(U_{\bullet}, K)=\check{\mathscr{C}}^1(U_{\bullet}, K^0)\oplus\check{\mathscr{C}}^0(U_{\bullet}, K^1)$$

est un morphisme de $\mathscr{H}^1K[-1]$ dans $\check{\mathscr{C}}(U_{\bullet}, K)$, dont l'image $\alpha(s)$ dans $\mathrm{Hom}_{D(T)}(\mathscr{H}^1K[-1], K)$ est une décomposition de K. Par des arguments analogues à ceux de la preuve de 2.1 (d), on vérifie que $\alpha(s)$ est indépendant des choix de $(U_{\bullet}, f, h)$, et ne dépend que de la classe de s à isomorphisme près. Il reste à vérifier que, si t est un second objet global, on a $\alpha(t)-\alpha(s)=t-s$ dans

$\mathrm{Ext}^1(\mathscr{H}^1K, \mathscr{H}^0K)$. On peut supposer que t est décrit par $(U_., g, k)$ et qu'on a, sur U_0, $u: \mathscr{H}^1K \to K^0$ tel que $g - f = du$. Le carré

$$\begin{array}{ccc} d_1^* f & \xrightarrow{h} & d_0^* f \\ {\scriptstyle d_1^* u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d_0^* u} \\ d_1^* g & \xrightarrow{k} & d_0^* g \end{array}$$

fournit

$$v = d_1^* u + k - h - d_0^* u : \mathscr{H}^1K \to \mathscr{H}^0K \quad \text{sur } U_1,$$

un 1-cocycle de $U_.$ à valeurs dans $\mathscr{H}om(\mathscr{H}^1K, \mathscr{H}^0K)$, dont l'image dans $H^1(T, \mathscr{H}om(\mathscr{H}^1K, \mathscr{H}^0K))$ est (avec des conventions adéquates) la classe de $t - s$. Avec les notations ci-dessus, on a alors

$$(k, g) - (h, f) = v + du : \mathscr{H}^1K \to \check{\mathscr{C}}^1(U_., K),$$

où u est considéré ici comme flèche de $\mathscr{H}^1K$ dans $\check{\mathscr{C}}^0(U_., K)$ et d désigne la différentielle totale du complexe $\check{\mathscr{C}}(U_., K)$. On a donc bien $\alpha(t) - \alpha(s) = t - s$, ce qui achève la démonstration de (b).

3.4. Soient S un schéma de caractéristique $p > 0$, X un schéma lisse sur S, et $F: X \to X'$ le Frobenius relatif (1.1). Supposons donné un schéma $\tilde{S}$ plat sur $\mathbf{Z}/p^2$ dont S est la réduction modulo p. On se propose de décrire la gerbe des scindages de $K = \tau_{\leqq 1} F_* \Omega^{\cdot}_{X/S}$ en termes de relèvements de X' sur $\tilde{S}$.

Pour tout schéma Y lisse sur S, la *gerbe des relèvements* de Y sur $\tilde{S}$, notée $\mathrm{Rel}(Y, \tilde{S})$, est la gerbe sur Y ayant pour objets sur un ouvert U les schémas $\tilde{U}$ plats sur $\tilde{S}$ ayant U pour réduction modulo p (i.e. munis d'un isomorphisme de leur réduction modulo p avec U). Un morphisme $\tilde{U}' \to \tilde{U}''$ est un morphisme de $\tilde{S}$-schémas, de réduction modulo p l'identité. Le faisceau des automorphismes d'un quelconque relèvement de U est le faisceau abélien $\Theta_{U/S} = \mathscr{H}om(\Omega^1_{U/S}, \mathscr{O}_U)$ des champs de vecteurs relatifs sur U.

Théorème 3.5. *Il existe une équivalence de gerbes canonique, définie ci-dessous,*

$$\Phi: \mathrm{Rel}(X', \tilde{S}) \to \mathrm{sc}(\tau_{\leqq 1} F_* \Omega^{\cdot}_{X/S}),$$

induisant l'identité sur les faisceaux d'automorphismes des objets.

(Noter que, pour les deux gerbes considérées, le faisceau des automorphismes d'un objet est le faisceau $\Theta_{X'/S}$ des champs de vecteurs relatifs.)

Tenant compte de 3.3, on en déduit:

Corollaire 3.6. (a) *Pour que X' admette un relèvement sur $\tilde{S}$, il faut et il suffit que $\tau_{\leqq 1} F_* \Omega^{\cdot}_{X/S}$ soit décomposable.*

(b) *Si tel est le cas, $\alpha \circ \Phi$ est une bijection affine de l'ensemble des classes à isomorphisme près de relèvements de X' sur $\tilde{S}$ sur l'ensemble des décompositions de $\tau_{\leqq 1} F_* \Omega^{\cdot}_{X/S}$, induisant l'identité sur le groupe des translations $\mathrm{Ext}^1(\mathscr{H}^1 F_* \Omega^{\cdot}_{X/S}, \mathscr{H}^0 F_* \Omega^{\cdot}_{X/S})$ (isomorphe, par Cartier, à $\mathrm{Ext}^1(\Omega^1_{X'/S}, \mathscr{O}_{X'}) = H^1(X', \Theta)$).*

Les arguments de 2.1 (a) et de la preuve de 2.3 donnent aussi:

Corollaire 3.7. (a) *A tout relèvement de X' sur $\tilde{S}$ est associé canoniquement un isomorphisme de $D(X')$*

$$\bigoplus_{i<p} \Omega^i_{X'/S}[-i] \xrightarrow{\sim} \tau_{<p} F_* \Omega^{\cdot}_{X/S}$$

induisant C^{-1} sur $\mathscr{H}^i$.

(b) *Si X est de dimension relative $\leqq p$, si X' se relève sur $\tilde{S}$, et si $H^{p+1}(X', (\Omega^p_{X'/S})^\vee)=0$ (ce qui est le cas par exemple si S est affine et X propre sur S), alors $F_*\Omega^{\cdot}_{X/S}$ est décomposable, i.e. il existe un isomorphisme de $D(X')$*

$$\bigoplus_{i} \Omega^i_{X'/S}[-i] \xrightarrow{\sim} F_* \Omega^{\cdot}_{X/S}$$

induisant C^{-1} sur $\mathscr{H}^i$.

Démonstration de 3.5. Soient U un ouvert de X et $\tilde{U}'$ un relèvement de U'. Il s'agit d'attacher (fonctoriellement) à $\tilde{U}'$ un objet de $\mathrm{sc}(\tau_{\leqq 1} F_* \Omega^{\cdot}_{X/S})$ au-dessus de U. Il suffit de construire cet objet dépendant d'un choix auxiliaire, et un système transitif d'isomorphismes entre les objets attachés à divers choix; il suffit même d'effectuer cette construction localement, de façon compatible au recollement. Le choix auxiliaire est celui d'un relèvement $\tilde{U}$ de U sur $\tilde{S}$ et d'un relèvement $\tilde{F}: \tilde{U} \to \tilde{U}'$ de F. De tels relèvements existent localement. A $(\tilde{U}, \tilde{F})$ on attache le scindage $s(\tilde{U}, \tilde{F})$ suivant:

$$p^{-1} \tilde{F}^* : \Omega^1_{U'/S} \to F_* \Omega^1_{U/S}$$

(cf. 2.1 (b)): comme $F^*: \Omega^1_{U'/S} \to F_* \Omega^1_{U/S}$ est nul, l'image de $\tilde{F}^*: \Omega^1_{\tilde{U}'/\tilde{S}} \to \tilde{F}_* \Omega^1_{\tilde{U}/\tilde{S}}$ est contenue dans $p\tilde{F}_* \Omega^1_{\tilde{U}/\tilde{S}}$; on vérifie facilement, par localisation étale et réduction au cas où U est l'espace affine type $\mathbf{A}^n_S = S[t_1, \ldots, t_n]$, $\tilde{U}'$ le relèvement canonique $\mathbf{A}^n_{\tilde{S}}$ de U', et $\tilde{F}$ donné par $t_i \mapsto t_i^p$, que $p^{-1}\tilde{F}^*$ relève l'isomorphisme de Cartier $C^{-1}: \Omega^1_{U'/S} \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}^1 F_* \Omega^{\cdot}_{U/S}$, donc que $s(\tilde{U}, \tilde{F})$ est bien un scindage de $\tau_{\leqq 1} F_* \Omega^{\cdot}_{X/S}$ sur U.

Pour $\tilde{U}$ donné, les relèvements $\tilde{F}$ de F forment un espace affine sous $H^0(U, F^* \Theta_{U'/S})$ et chaque $D \in H^0(U, F^* \Theta_{U'/S})$ définit $H(D): \Omega^1_{U'/S} \to F_* \mathcal{O}$. De ce que $dF=0$ résulte que, pour tout automorphisme a du relèvement $\tilde{U}$, on a $\tilde{F} \circ a = \tilde{F}$.

Construisons un système transitif d'isomorphismes entre les $s(\tilde{U}, \tilde{F})$. Soient deux choix $(\tilde{U}_i, \tilde{F}_i)$ $(i=1,2)$. Localement, les relèvements $\tilde{U}_1$ et $\tilde{U}_2$ de U sont isomorphes. Choisissons localement un isomorphisme $u: \tilde{U}_1 \to \tilde{U}_2$. Le relèvement $\tilde{F}_2 \circ u$ de F ne dépend pas de u; il se globalise donc en un relèvement de F encore noté $\tilde{F}_2 \circ u: \tilde{U}_1 \to \tilde{U}'_2$. On a $s(\tilde{U}_2, \tilde{F}_2) = s(\tilde{U}_1, \tilde{F}_2 \circ u)$. D'autre part, si D est la différence entre $\tilde{F}_1$ et $\tilde{F}_2 \circ u$ (i.e. $\tilde{F}_2 \circ u - \tilde{F}_1 = pD$), on vérifie que

$$s(\tilde{U}_2, \tilde{F}_2) - s(\tilde{U}_1, \tilde{F}_1) = dH(D).$$

On prend $H(D)$ comme isomorphisme de $s(\tilde{U}_1, \tilde{F}_1)$ sur $s(\tilde{U}_2, \tilde{F}_2)$. C'est le système transitif d'isomorphismes voulus, et $\Phi(\tilde{U}')$ est la «valeur commune» des $s(\tilde{U}, \tilde{F})$.

Si $v: \tilde{U}'_1 \to \tilde{U}'_2$ est un morphisme de relèvements de U', chaque choix auxiliaire $(\tilde{U}, \tilde{F})$ pour $\tilde{U}'_1$ en définit un, $(\tilde{U}, v \circ \tilde{F})$ pour U'_2. On définit $\Phi(v)$ par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
s(\tilde{U}, \tilde{F}) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\simeq"] & s(\tilde{U}, v \circ \tilde{F}) \arrow[d, "\simeq"] \\
\Phi(U'_1) \arrow[r, "\Phi(v)"] & \Phi(U'_2).
\end{tikzcd}$$

En particulier, pour $\tilde{U}'_1 = \tilde{U}'_2$, $\Phi(v)$ est composé de $F: \mathcal{O}_{U'} \hookrightarrow F_*\mathcal{O}_U$ et de la différence $v - \mathrm{Id}: \Omega^1_{U'} \to \mathcal{O}_{U'}$.

Il est clair que Φ est un morphisme de gerbes. Induisant l'identité sur les faisceaux d'automorphismes des objets, c'est une équivalence.

Remarque 3.8. L'homomorphisme $\varphi^1_{\tilde{X}}: \Omega^1_{X'/S}[-1] \to F_*\Omega^{\cdot}_{X/S}$ de 2.1 (ou de sa variante 2.2(i)) ne dépend en fait que de $\tilde{X}'$: avec les notations de 3.3 et 3.5, on a

$$\varphi^1_{\tilde{X}} = \alpha \circ \Phi(\tilde{X}').$$

Si $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2$ sont deux relèvements de X, $\varphi^1_{\tilde{X}_2} - \varphi^1_{\tilde{X}_1}$ est donc la classe, dans $H^1(X', \Theta_{X'/S})$, de la différence $(X'_2 - X'_1)$.

Remarque 3.9. Soit $\tilde{S}$ un relèvement de S sur $\mathbf{Z}/p^2$. D'après 3.5, la gerbe $\mathrm{Rel}(X', \tilde{S})$ est indépendante de S: c'est $\mathrm{sc}(\tau_{\leqq 1} F_*\Omega^{\cdot}_{X/S})$. Montrons comment vérifier cette indépendance directement. Soient $\tilde{S}_1$ et $\tilde{S}_2$ deux relèvements de S et $T := \tilde{S}_1 \coprod_S \tilde{S}_2$ leur somme amalgamée. Le faisceau structural de $\tilde{S}_i$ est une extension de $\mathcal{O}_S$ par un idéal de carré nul I_i et $\mathcal{O}_T$ est une extension de $\mathcal{O}_S$ par $I_1 \oplus I_2$, avec encore $(I_1 \oplus I_2)^2 = 0$. La multiplication par p de $\mathcal{O}_{\tilde{S}_i}$ (resp. $\mathcal{O}_T$) se factorise par un isomorphisme de $\mathcal{O}_S$-modules $\mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} I_i$ (resp. par l'application diagonale $\mathcal{O}_S \to I_1 \oplus I_2$). Soit $\bar{T}$ la réduction modulo p de T. Le faisceau structural $\mathcal{O}_{\bar{T}}$ étant extension de $\mathcal{O}_S$ par un idéal de carré nul, le Frobenius de $\bar{T}$ se factorise par S: on dispose d'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\tilde{S}_i \arrow[d, hook] & S \arrow[l, hook'] \arrow[r, "F_S"] \arrow[d, hook] & S \arrow[d, hook] \\
T & \bar{T} \arrow[l, hook'] \arrow[r, "F_{\bar{T}}"'] \arrow[ur, "f"] & \bar{T}
\end{tikzcd}$$

et donc, en particulier, d'un relèvement f^*X de $X' = F_S^*X$ sur $\bar{T}$. Pour $i = 1, 2$, la somme amalgamée T est encore la somme amalgamée, sur S, de $\bar{T}$ et de $\tilde{S}_i$. Le foncteur «image inverse sur $\tilde{S}_i$» est donc une équivalence de la gerbe des relèvements de f^*X sur T avec celle des relèvements de X' sur $\tilde{S}_i$. Composant ces équivalences $(i = 1, 2)$, on obtient une équivalence $\mathrm{Rel}(X', \tilde{S}_1) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Rel}(X', \tilde{S}_2)$.

4. Compléments et variantes

4.1. Dégénérescence relative

4.1.1. Soit S un schéma de caractéristique $p > 0$ et $f: X \to S$ un morphisme lisse. Deux suites spectrales aboutissent à $R^*f_*\Omega^{\cdot}_{X/S}$: (i) la *suite spectrale de Hodge*

$$E_1^{ij} = R^j f_* \Omega^i_{X/S} \Rightarrow R^{i+j} f_* \Omega^{\cdot}_{X/S};$$

(ii) la *suite spectrale conjuguée*

$${}_cE_2^{ij} = R^i f'_* \mathcal{H}^j F_* \Omega^{\cdot}_{X/S} \Rightarrow R^{i+j} f_* \Omega^{\cdot}_{X/S}$$

(où $f': X' \to S$ est déduit de f par le changement de base $F_S: S \to S$, et $F = F_{X/S}$) (cf. Katz [16, §2]). Le terme initial de (ii) se récrit d'ailleurs, grâce à Cartier, ${}_cE_2^{ij} = R^i f'_* \Omega^j_{X'/S}$.

Proposition 4.1.2. *Avec les notations précédentes, supposons f de type fini, et S local artinien, de point fermé s et de corps résiduel k. Pour $T \to S$, on note $f_T: X_T \to T$ le morphisme déduit de f par le changement de base $T \to S$. Soit n un entier et supposons que:*

(a) *pour $i+j=n$, les $H^j(X_s, \Omega^i)$ sont de dimension finie sur k;*

(b) *pour tout sous-schéma fermé T de S, la suite spectrale conjuguée relative à f_T vérifie ${}_cE_2^{ij} = {}_cE_\infty^{ij}$ pour $i+j=n$.*

Sous ces hypothèses, la suite spectrale de Hodge vérifie $E_1^{ij} = E_\infty^{ij}$ pour $i+j=n$ et les $E_1^{ij} = R^j f_* \Omega^i_{X/S}$ sont, pour $i+j=n$, libres de formation compatible à tout changement de base.

Soit A l'anneau de S. Le faisceau $\Omega^i_{X/S}$ étant S-plat et le morphisme f de type fini, $Rf_* \Omega^i_{X/S}$ est d'amplitude plate finie (SGA 6 III 3.7.1), donc isomorphe à un complexe borné K_i de A-modules plats (donc libres). Pour tout S-schéma T, $Rf_{T*} \Omega^i_{X_T/T}$ est déduit de K_i par changement de base de S à T (SGA 6 III 3.7). En particulier, $H^j(X_s, \Omega^i) = H^j(K_i \otimes_A k)$. Il s'ensuit, par dévissage de A comme A-module, que l'on a

$$\lg R^j f_* \Omega^i_{X/S} \leqq h^{ij} \lg A, \tag{4.1.2.1}$$

où $h^{ij} = \dim_k H^j(X_s, \Omega^i)$ et lg désigne la longueur comme A-module. Grâce à (a), les A-modules $R^j f_* \Omega^i_{X/S}$ sont donc de longueur finie pour $i+j=n$. De plus, on peut supposer K_i minimal, i.e. tel que $K_i \otimes_A k$ soit à différentielle nulle: décomposant $K_i \otimes_A k$ en somme d'un complexe à différentielle nulle et d'un complexe acyclique, on peut trouver un sous-complexe K' de K_i, somme de complexes de la forme $\left(0 \to E \xrightarrow{\text{id}} E \to 0\right)$ et facteur direct de K_i degré à degré, tel que $(K_i/K') \otimes_A k$ soit à différentielle nulle; il suffit alors de remplacer K_i par K_i/K'. Pour un couple (i,j) tel que $i+j=n$ et K_i minimal, l'égalité dans (4.1.2.1) ne peut être atteinte que si les différentielles $K_i^{j-1} \xrightarrow{d^{j-1}} K_i^j \xrightarrow{d^j} K_i^{j+1}$ sont nulles (car $\lg \operatorname{Im} d^{j-1} + \lg H^j(K_i) + \lg \operatorname{Im} d^j = \lg K_i^j = h^{ij} \lg A$), auquel cas $R^j f_* \Omega^i_{X/S}$ est libre de formation compatible à tout changement de base.

Comme les E_1^{ij} sont des A-modules de longueur finie pour $i+j=n$, l'égalité $E_1^{ij} = E_\infty^{ij}$ équivaut à ce que l'égalité soit atteinte dans l'inégalité

$$\lg R^n f_* \Omega^{\cdot}_{X/S} \leqq \sum_{i+j=n} \lg R^j f_* \Omega^i_{X/S}. \tag{4.1.2.2}$$

D'autre part, X'_s, déduit de X_s par une extension du corps de base, a mêmes nombres de Hodge h^{ij} que X_s. D'après la première partie de l'argument ci-dessus, les ${}_cE_2^{ij} = R^i f'_* \Omega^j_{X'/S}$ sont donc aussi des A-modules de longueur finie pour $i+j=n$. D'après (b) (pour $T=S$), on a donc

$$\lg R^n f_* \Omega^{\cdot}_{X/S} = \sum_{i+j=n} \lg R^i f'_* \Omega^j_{X'/S}. \tag{4.1.2.3}$$

Si S est le spectre d'un corps, (4.1.2.3) implique l'égalité dans (4.1.2.2), et 4.1.2 en résulte. Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A. Prouvons par récurrence sur un entier $N \geqq 1$ que 4.1.2 est vrai lorsque $\mathfrak{m}^N=0$. Le cas $N=1$, $A=k$ vient d'être traité. Si $N>1$, il existe N' vérifiant $1 \leqq N' < N$, $pN' \geqq N$. Pour un tel N', l'endomorphisme de Frobenius F_S de S se factorise par $T=\operatorname{Spec}(A_1)$, $A_1=A/\mathfrak{m}^{N'}$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "f"'] & X' \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & X_T \arrow[r, hook] \arrow[d, "f_T"] & X \arrow[d, "f"] \\ & S \arrow[r] & T \arrow[r, hook] & S. \end{tikzcd}$$

L'hypothèse de récurrence s'applique à X_T/T: pour $i+j=n$, $R^j f_* \Omega^i_{X_T/T}$ est libre de rang h^{ij}, de formation compatible à tout changement de base. En particulier (changement de base $S \to T$), $R^j f'_* \Omega^i_{X'/S}$ est libre de rang h^{ij}, et l'hypothèse ${}_cE_2^{ij}={}_cE_\infty^{ij}$ pour $i+j=n$ assure que $R^n f_* \Omega^{\cdot}_{X/S}$ est libre, de rang $\sum\limits_{i+j=n} h^{ij}$ d'après (4.1.2.3). Les inégalités (4.1.2.1) et (4.1.2.2) sont donc des égalités et 4.1.2 en résulte.

Remarque 4.1.3. Soient $f: X \to S$ comme en 4.1.1 et b un entier. L'hypothèse (a) de 4.1.2 est vérifiée si f est propre. D'autre part, si $\tau_{\leqq b} F_* \Omega^{\cdot}_{X/S}$ est décomposable (3.1), l'hypothèse (b) de 4.1.2 est vérifiée pour tout $n \leqq b$. L'hypothèse «décomposable» est stable par changement de base car les $\mathscr{H}^i F_* \Omega^{\cdot}_{X/S}$ sont S-plats. Il suffit donc de vérifier ${}_cE_2^{ij}={}_cE_\infty^{ij}$ pour X/S et $i+j \leqq b$. La décomposabilité de $\tau_{\leqq b} F_* \Omega^{\cdot}_{X/S}$ assure que $d_r^{ij}=0$ pour $j \leqq b$, donc dans la région $i+j \leqq b$ requise.

Corollaire 4.1.4. *Soient S un schéma de caractéristique $p>0$, $f: X \to S$ un morphisme propre et lisse et b un entier. On fait l'hypothèse que $\tau_{\leqq b} F_* \Omega^{\cdot}_{X/S}$ est décomposable* (3.1) *dans $D(X')$. Alors:*

(i) *Pour $i+j \leqq b$, les $R^j f_* \Omega^i_{X/S}$ sont localement libres de type fini, de formation compatible à tout changement de base;*

(ii) *la suite spectrale de Hodge de f vérifie $E_1^{ij}=E_\infty^{ij}$ pour $i+j \leqq b$.*

Des arguments standard permettent successivement de supposer S affine, $S=\operatorname{Spec}(A)$, puis A noethérien (écrire A comme limite inductive d'anneaux de type fini sur $\mathbf{Z}$), noethérien local, complet, et enfin artinien local (écrire $A=\operatorname{lim\,proj} A/\mathfrak{m}^n$). On applique alors 4.1.3 et 4.1.2 pour chaque $n \leqq b$.

Corollaire 4.1.5. *Soit f comme en* 4.1.4, *et supposons que $F_* \Omega^{\cdot}_{X/S}$ soit décomposable dans $D(X')$. Alors les $R^j f_* \Omega^i_{X/S}$ sont localement libres de type fini, de formation compatible à tout changement de base, et la suite spectrale de Hodge de f dégénère en E_1.*

Il suffit d'appliquer 4.1.4 avec $b \geqq 2\dim(X/S)$.

Remarque 4.1.6. L'énoncé 3.7 fournit des conditions suffisantes assurant que l'hypothèse de décomposabilité de 4.1.4 (ou 4.1.5) est vérifiée. On prendra garde que la condition de relevabilité porte sur X' et non X. Toutefois, si, pour $\tilde{S}$ comme en 3.7, l'endomorphisme de Frobenius F_S de S admet un relèvement $F_{\tilde{S}}$ à $\tilde{S}$, alors tout relèvement $\tilde{X}$ de X sur $\tilde{S}$ définit, par changement de base par $F_{\tilde{S}}$, un relèvement de X' sur $\tilde{S}$. Un tel relèvement $F_{\tilde{S}}$ existe par exemple si S est affine et lisse sur un corps parfait k de caractéristique p, et $\tilde{S}$ est un relèvement de S sur $W_2(k)$.

4.2. Pôles logarithmiques

4.2.1. Soient S un schéma de caractéristique $p>0$, X un S-schéma lisse, et $D\subset X$ un diviseur à croisements normaux relatif. Soit $\Omega^{\cdot}_{X/S}(\log D)$ le complexe de de Rham relatif à pôles logarithmiques de long de D. On a encore un isomorphisme de Cartier (cf. Katz [15, 7.2]):

$$C^{-1}:\Omega^{i}_{X'/S}(\log D')\xrightarrow{\sim}\mathscr{H}^{i}F_{*}\Omega^{\cdot}_{X/S}(\log D). \tag{4.2.1.1}$$

Plus généralement, soient A, B, et $D=A+B$ des diviseurs à croisements normaux relatifs sur X (A et B sont donc transverses l'un à l'autre), et posons

$$\Omega^{\cdot}_{X/S}(A,B):=\Omega^{\cdot}_{X/S}(\log D)(-A). \tag{4.2.1.2}$$

On vérifie par un calcul local (réduction au cas où $X=S[t]$ est la droite affine sur S et D le diviseur (t)) que l'inclusion

$$\Omega^{\cdot}_{X/S}(\log D)(-pA)\hookrightarrow\Omega^{\cdot}_{X/S}(A,B)$$

est un quasi-isomorphisme. Son image directe par F_{*} est un quasi-isomorphisme

$$(F_{*}\Omega^{\cdot}_{X/S}(\log D))(-A')\to F_{*}\Omega^{\cdot}_{X/S}(A,B).$$

Par composition avec (4.2.1.1) tensorisé avec $\mathcal{O}(-A')$ on obtient donc un isomorphisme

$$C^{-1}:\Omega^{i}_{X'/S}(A',B')\xrightarrow{\sim}\mathscr{H}^{i}F_{*}\Omega^{\cdot}_{X/S}(A,B). \tag{4.2.1.3}$$

Remarques 4.2.2. (a) La définition (4.2.1.2) garde un sens sur une base S quelconque. Pour X la droite affine sur S, de coordonnée t, D le diviseur (t), on a

$$\Omega^{\cdot}_{X/S}(\log D)=\left(\mathcal{O}_S[t]\to\mathcal{O}_S[t]\frac{dt}{t}\right),$$

$$\Omega^{\cdot}_{X/S}(\log D)(-D)=(t\mathcal{O}_S[t]\to\mathcal{O}_S[t]dt).$$

Soient a,b,c des entiers $\geqq 0$, $n=a+b+c$, et pour $1\leqq i\leqq n$, E_i la droite affine sur S, de coordonée t_i, D_i le diviseur (t_i). Soient $X=E_1\times_S\ldots\times_S E_n$ et $D=A+B$ le diviseur défini par $A=\sum_{1\leqq i\leqq a}pr_i^{-1}(D_i)$, $B=\sum_{a+1\leqq i\leqq a+b}pr_i^{-1}(D_i)$. Alors $\Omega^{\cdot}_{X/S}(A,B)$ est produit tensoriel externe des $\Omega^{\cdot}_{E_i/S}(\log D_i)(-D_i)$ pour $1\leqq i\leqq a$, des $\Omega^{\cdot}_{E_i/S}(\log D_i)$ pour $a+1\leqq a+b$, et des $\Omega^{\cdot}_{E_i/S}$ pour $i>a+b$.

(b) Soit (X,D) comme en 4.2.1, avec X de dimension relative n sur S. Le complexe $F_{*}\Omega^{\cdot}_{X/S}(\log D)$ est auto-dual, pour une dualité à valeurs dans $\Omega^{n}_{X'/S}(\log D')$. D'autre part, le dual de Serre de $F_{*}\Omega^{\cdot}_{X/S}(A,B)$ (dualité à valeurs dans $\Omega^{n}_{X'/S}$) est $F_{*}\Omega^{\cdot}_{X/S}(B,A)$.

(c) Soient S un schéma, X un S-schéma lisse, et D un diviseur à croisements normaux relatif somme de diviseurs lisses distincts D_i $(1\leqq i\leqq r)$. Alors la suite

$$0\to\Omega^{\cdot}_{X/S}(\log D)(-D)\to\Omega^{\cdot}_{X/S}\to\bigoplus_{i}\Omega^{\cdot}_{D_i/S}\to\bigoplus_{i<j}\Omega^{\cdot}_{D_i\cap D_j/S}\to\ldots$$

est exacte (vérification locale, à l'aide d'une décomposition à la Künneth, comme en(a)). Le quotient $\Omega^{\cdot}_{X/S}/\Omega^{\cdot}_{X/S}(\log D)(-D)$ est le complexe de de Rham «à la Sullivan» de D: formes différentielles sur les D_i qui se recollent. Pour $S = \operatorname{Spec}\mathbf{C}$, il fournit une résolution du faisceau constant $\mathbf{C}$ sur l'espace analytique associé à D; le complexe $\Omega^{\cdot}_{X/\mathbf{C}}(\log D)(-D)$ calcule donc $j_!\mathbf{C}$, où $j: X-D \hookrightarrow D$ est l'inclusion. On sait d'autre part que $\Omega^{\cdot}_{X/\mathbf{C}}(\log D)$ calcule $Rj_*\mathbf{C}$ (cf. [6, 3.1.8]). Plus généralement, si X est une variété analytique complexe, et $A, B, D = A+B$ des diviseurs à croisements normaux sur X,

$$\begin{tikzcd} X-A \arrow[r, hook, "j_A"] & X \\ X-D \arrow[u, hook, "j_B"] \arrow[r, hook, "j_A"] & X-B, \arrow[u, hook, "j_B"'] \end{tikzcd}$$

on vérifie que l'on a

$$\Omega^{\cdot}_X(A,B) = Rj_{A!}Rj_{B*}\mathbf{C} = Rj_{B*}Rj_{A!}\mathbf{C},$$

avec $\Omega^{\cdot}_X(A,B)$ défini comme en (4.2.1.2).

4.2.3. Les énoncés 2.1, 2.3, 2.4, 3.5, 3.6, 3.7, 3.8 ont des variantes «à pôles logarithmiques». On définit encore une équivalence de la gerbe $\operatorname{Rel}(X', D', \tilde{S})$ des relèvements de (X', D') sur $\tilde{S}$ avec la gerbe des scindages de $\tau_{\leqq 1}F_*\Omega^{\cdot}_{X/S}(\log D)$. On ne considère que des relèvements $(\tilde{X}', \tilde{D}')$ où $\tilde{D}'$ est encore un diviseur à croisements normaux relatif, le faisceau $\Theta_{X'/S}$ est remplacé par le dual $\Theta_{X'/S}(-\log D')$ de $\Omega^{\cdot}_{X'/S}(\log D')$, et, pour un choix (local) d'un relèvement $(\tilde{X}, \tilde{D})$ de (X, D), on ne considère que les relèvements $\tilde{F}$ tels que $\tilde{F}^{-1}(\tilde{D}') = p\tilde{D}$. De plus, tout relèvement global de (X', D') fournit une décomposition canonique de $\tau_{<p}F_*\Omega^{\cdot}_{X/S}(\log D)$ et une décomposition (non canonique) de $F_*\Omega^{\cdot}_{X/S}(\log D)$ si X est de dimension relative $\leqq p$ et si $H^{p+1}(X', (\Omega^p_{X'/S}(\log D'))^{\cdot}) = 0$ (ce qui est le cas par exemple si S est affine et X propre sur S) (autodualité de $F_*\Omega^{\cdot}_{X/S}(\log D)$, 4.2.2 (b)).

Si $D = A+B$ comme en 4.2.1, une telle décomposition fournit une décomposition analogue pour $F_*\Omega^{\cdot}_{X/S}(A,B)$ (quasi-isomorphe à $(F_*\Omega^{\cdot}_{X/S}(\log D))(-A')$).

Soient $f: X \to S$ propre et lisse, $D = A+B$ comme en 4.2.1, b un entier, et supposons que $\tau_{\leqq b}F_*\Omega^{\cdot}_{X/S}(\log D)$ soit décomposable. Alors on vérifie comme en 4.1.4 que, pour $i+j \leqq b$, les $R^jf_*\Omega^i_{X/S}(A,B)$ sont localement libres de type fini, de formation compatible à tout changement de base, et que la suite spectrale

$$E_1^{ij} = R^jf_*\Omega^i_{X/S}(A,B) \Rightarrow R^{i+j}f_*\Omega^{\cdot}_{X/S}(A,B)$$

vérifie $E_1^{ij} = E_\infty^{ij}$ pour $i+j \leqq b$.

Par un argument similaire à la preuve de 2.6, on en déduit:

Corollaire 4.2.4. *Soient X un schéma propre et lisse sur un corps K de caractéristique nulle et $D = A+B$ un diviseur à croisements normaux sur X. Alors la suite spectrale de Hodge*

$$E_1^{ij} = H^j(X, \Omega^i_{X/K}(A,B)) \Rightarrow H^{i+j}(X, \Omega^{\cdot}_{X/K}(A,B))$$

dégénère en E_1.

Le cas particulier $A = \emptyset$ fournit une nouvelle démonstration du résultat de dégénérescence [6, 3.2.13 (ii)].

4.2.5 Il n'est pas difficile de transposer dans le cadre des espace algébriques de M. Artin (cf. Knutson [17]) les résultats principaux de cet article, notamment 3.5 à 3.7 et leurs variantes 4.2.3.

Remerciements. Nous sommes reconnaissants à J.-M. Fontaine et W. Messing de nous avoir fait part de leurs résultats de dégénérescence, qui, avec celui de K. Kato, ont servi de catalyseur à ceux présentés ici. C'est un plaisir de remercier G. Laumon pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail depuis son début; sa lecture critique d'une première version de cet article et les suggestions qu'il nous a faites nous ont été précieuses. Nous tenons enfin à remercier M. Raynaud pour de nombreuses discussions.

Bibliographie

1. Akizuki, Y., Nakano, S.: Note on Kodaira-Spencer's proof of Lefschetz's theorem. Proc. Jap. Acad., Ser. A **30**, 266–272 (1954)
2. Berthelot, P.: Sur le «théorème de Lefschetz faible» en cohomologie cristalline. C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. A **277**, 955–958 (1973)
3. Berthelot, P., Ogus, A.: Notes on crystalline cohomology. Mathematical Notes n° 21, Princeton University Press 1978
4. Cartier, P.: Une nouvelle opération sur les formes différentielles. C. R. Acad. Sci., Paris, **244**, 426–428 (1957)
5. Deligne, P.: Théorème de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales. Publ. Math., Inst. Hautes Etud. Sci. **35**, 107–126 (1968)
6. Deligne, P.: Théorie de Hodge II. Publ. Math., Inst. Hautes Etud. Sci. **40**, 5–57 (1972)
7. Esnault, H., Viehweg, E.: Logarithmic De Rham complexes and vanishing theorems. Invent. Math. **86**, 161–194 (1986)
8. Faltings, G.: *p*-adic Hodge Theory. Preprint, Princeton University (1985)
9. Flexor, M.: Nouveaux contre-exemples aux énoncés d'annulation à la Kodaira en caractéristique $p>0$, dans Séminaire sur les pinceaux de courbes de genre au moins deux par L. Szpiro. Astérisque **86**, 79–89 (1981)
10. Fontaine, J.-M., Messing, W.: Cohomologie cristalline et dégénérescence de la suite spectrale de Hodge vers de Rham. Preprint, Université de Grenoble (1985)
11. Fossum, R.: Formes différentielles non fermées, dans Séminaire sur les pinceaux de courbes de genre au moins deux par L. Szpiro. Astérisque **86**, 90–96 (1981)
12. Giraud, J.: Cohomologie non abélienne. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 179. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1971
13. Illusie, L.: Complexe de de Rham-Witt et cohomologie cristalline. Ann. Sci. Ec. Norm. Super., IV. Ser. **12**, 501–661 (1979)
14. Kato, K.: On *p*-adic vanishing cycles (Application of ideas of Fontaine-Messing). Preprint, Tokyo University (1985)
15. Katz, N.: Nilpotent Connections and the Monodromy Theorem. Publ. Math., Inst. Hautes Etud. Sci. **39**, 175–232 (1970)
16. Katz, N.: Algebraic solutions of differential equations (*p*-Curvature and the Hodge filtration). Invent. Math. **18**, 1–118 (1972)
17. Knutson, D.: Algebraic spaces. Lect. Notes Math. 203. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1971
18. Kodaira, K.: On a differential-geometric method in the theory of analytic stacks. Proc. Natl. Acad. Sci. USA **39**, 1268–1273 (1953)
19. Lang, W.: Quasi-elliptic surfaces in characteristic three. Ann. Sci. Ec. Norm. Super., IV. Ser. **12**, 473–500 (1979)
20. Mazur, B.: Frobenius and the Hodge Filtration (Estimates). Ann. Math. **98**, 58–95 (1973)
21. Ménégaux, R.: Un théorème d'annulation en caractéristique positive, dans Séminaire sur les pinceaux de courbes de genre au moins deux par L. Szpiro. Astérisque **86**, 35–43 (1981)

22. Mumford, D.: Pathologies of modular surfaces. Am. J. Math. **83**, 339–342 (1961)
23. Ramanujam, C.P.: Remarks on the Kodaira Vanishing Theorem. J. Indian Math. Soc. **36**, 41–51 (1972); **38**, 121–124 (1974)
24. Raynaud, M.: Contre-exemple au "Vanishing Theorem" en caractéristique $p>0$, dans C. P. Ramanujam – A tribute, Studies in Mathematics 8, Tata Institute of Fundamental Research Bombay, 273–278 (1978)
25. Serre, J.-P.: Sur la topologie des variétés algébriques en caractéristique p, dans Symposium Internacional de Topologia Algebraica, México, 24–53 (1958)
26. Suwa, N.: De Rham cohomology of algebraic surfaces with $q=-p_a$ in char. p, dans Algebraic Geometry, Proceedings, Tokyo-Kyoto 1982, Raynaud, M., Shioda, T. (eds.). Notes in Math., Vol. 1016, 73–85 (1983)
27. Szpiro, L.: Le théorème de la régularité de l'adjointe de Gorenstein à Kodaira, dans Int. Symposium on Algebraic Geometry Kyoto, 93–102 (1977)
28. Szpiro, L.: Sur le théorème de rigidité de Parsin et Arakelov, dans Journées de géometrie algébrique de Rennes II. Astérisque **64**, 169–202 (1979)

Sigles

EGA IV. Eléments de Géométrie Algébrique, par A. Grothendieck, rédigés avec la collaboration de J. Dieudonné. Publ. Math., Inst. Hautes Etud. Sci. **20** (1964); **24** (1965); **28** (1966); **32** (1967)

SGA 1. Revêtements étales et groupe fondamental, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1960/61, par A. Grothendieck. Lect. Notes Math., Vol. 224. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1971

SGA 6. Théorie des Intersections et Théorème de Riemann-Roch, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1966/67, par P. Berthelot, A. Grothendieck, L. Illusie. Lect. Notes in Math., Vol. 225. Berlin-Heidelberg-New York: Springer (1971)

Oblatum 10-X-1986