Version très provisoire (16/09/98) de notes du cours donné par Maxim Kontsevitch à l'ENS, lors du premier trimestre 1998.
Notes prises par Joel Bellaiche, Jean-François Dat, Ivan Marin, Georges Racinet et Hugues Randriambololona.
Pour toutes suggestions et corrections, envoyer un mail à marin@dmi.ens.fr

On appelle algèbre une algèbre associative à unité sur un corps k, i.e.

$$A \in Ob(Vect(k))$$

avec $1 \in A$ et un produit $A \otimes A \to A$ vérifiant les axiomes $(fg)h = f(gh)$ et $1f = f$.

Exemples de base

1) $A = Mat_n(k)$, ensemble des matrices $n \times n$.
2) $A = k[\Gamma]$, où Γ est un groupe.
3) $A = k[x_1, \ldots, x_n]/I$ où I est un idéal de type fini, i.e. A est une algèbre de fonctions sur un schéma affine.

Contreparties analytiques

1') Opérateurs bornés sur un espace de Hilbert.

2') $C^0(G)$, ensemble des fonctions continues à support compact sur G, où G est un groupe localement compact muni d'une mesure de Haar.

3') $C(X)$ (resp. $C^\infty(X)$) espace des fonctions continues (resp. C^∞) sur un espace topologique X (resp. une variété lisse X).

Thème du cours

- On va traduire le langage des algèbres dans celui des catégories triangulées, suivant un diagramme

$$\begin{tikzcd} algebres \arrow[rr] \arrow[dr] & & categories\ triangulees \\ & categories\ abeliennes \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

- De nouvelles constructions de catégories triangulées (Δ-catégories) à partir de la géométrie symplectique (homologie de Floer) et de la géométrie differentielle.

- Rôle des surfaces en géométrie non-commutative (homologie cyclique) et théorie de la déformation.

- Géométrie algébrique d'un point de vue non commutatif.

1.. Catégories abéliennes et équivalence de Morita

Soit A une algèbre.
Un A-module est la donnée de $M \in Ob(Vect(k))$ et d'une action $A \otimes M \to M$ telle que $f_1(f_2m) = (f_1f_2)m$ et $1m = m$.
Les A-modules à gauche forment une catégorie. C'est une catégorie abélienne, linéaire sur k.
Dans l'exemple 2, les $k[\Gamma]$-modules sont les représentations de Γ sur k. Dans l'exemple 3, les $k[x_1, \ldots, x_n]$-modules sont les faisceaux quasi-cohérents sur A^n.

Affirmation 1. *On a une équivalence de catégories*

$$Mat_n(k) - mod \simeq Vect(k) = k - mod$$

Proof. A $V \in Ob(Vect(k))$ on associe $k^n \otimes V \in Ob(Mat_n(k))$, via l'action de $Mat_n(k)$ sur k^n. Dans l'autre sens, si $\mathcal{U}$ est un objet de $Mat_n(k) - mod$, on définit e_{ij} la matrice de $Mat_n(k)$ la matrice dont le coefficient (i, j) vaut 1 et dont tous les autres valent 0, et $\pi_i = e_{ii}$. Alors,

$$\pi_i \pi_j = \delta_{ij} \quad et \quad \sum \pi_i = 1$$

On en déduit $\mathcal{U} = \bigoplus \pi_i \mathcal{U}$, et comme les

$$e_{ij} : \pi_j \mathcal{U} \to \pi_i \mathcal{U}$$

forment une famille d'isomorphismes qui identifient tous les $\pi_i \mathcal{U}$ à un k-module V,

$$\mathcal{U} = V \oplus \cdots \oplus V = k^n \otimes V$$

Le foncteur $V \mapsto k^n \otimes V$ est donc essentiellement surjectif. Il est d'évidence pleinement fidèle, on a donc bien une équivalence de catégories. □

Si A est un anneau, c'est un A-module à gauche, où l'action est donnée par le produit. $A^n = A \oplus \cdots \oplus A$ est également un A-module à gauche. C'est un A-module libre.
La meilleure classe de modules est celle des A-modules projectifs de type fini, parce [1] qu'ils se comportent comme des A-modules libres.
$Hom(A^n, A^m) = Mat_{m \times n}(A)$, la composition des morphismes étant donnée par la multiplication des matrices.

Définition 1. *Un objet M de $A - mod$ (ou plus généralement d'une catégorie abélienne) est appelé projectif si tout épimorphisme $N \to M$ est scindé.*

Pour vérifier cette propriété, on dispose de critères plus faciles à vérifier :

1) Tout module libre est projectif.
2) Si M est projectif de type fini, on a un épimorphisme $A^n \to M$ qui se scinde, donc $A^n = M \oplus M'$.

Affirmation 2. *Si $p_M \in End(A^n)$ est un projecteur, alors Imp_M est un module projectif.* [2]

On en déduit que l'on a une sous-catégorie pleine de la catégorie des A-modules projectifs de type fini, dans laquelle les objets sont les $P \in Mat_n(A)$ tels que $P^2 = P$ avec $n < \infty$ et, pour $P_1 \in Mat_{n_1}(A)$, $P_2 \in Mat_{n_2}(A)$,

$$Hom(P_1, P_2) = P_1 Mat_{n_1 \times n_2}(A) P_2$$

[1] qu'elle est suffisamment large et ... ?
[2] cf par exemple Lang, Algebra 3ème édition, p. 137

Exemple :

Soit X une variété lisse[3], et $A = C^\infty(X)$ algèbre des fonctions sur X à valeurs dans $\mathbb{C}$. On a alors une équivalence de catégories entre la *catégorie des A-modules projectifs de type fini* et la *catégorie des fibrés vectoriels lisses de dimension finie sur X.* [4]

En effet, un A-module projectif de type fini étant donné, on peut lui associer un projecteur $P = (p_{ij}) \in Mat_n(\mathbb{C})$, où les $P(x)$ constituent une famille de projecteurs dans $Mat_n(\mathbb{C})$ qui dépendent de façon lisse de $x \in X$. Les images forment alors un sous fibré du fibré trivial de dimension n au-dessus de X. Inversement, si l'on a un fibré vectoriel $\mathcal{E}$, on choisit un nombre fini de sections qui engendrent la fibre en chaque point. De ceci on déduit un épimorphisme $\mathbb{C}_X^n \twoheadrightarrow \mathcal{E}$ où $\mathbb{C}_X^n$ est le fibré trivial de dimension n. En utilisant une métrique hermitienne on peut scinder ce morphisme, et en déduire le module projectif que l'on veut.

Equivalence de Morita

Définition 2. *Deux algèbres A et B sont dites Morita équivalentes si $A - mod$ est équivalente à $B - mod$.*

Exemple : A est Morita équivalente à $Mat_n(A) = Mat_n(k) \otimes A$.

Soient deux algèbres A et B Morita équivalente. On considère la catégorie dont les objets sont les équivalences de catégorie k-linéaires de $A - mod$ vers $B - mod$, et les morphismes de F_1 dans F_2 les transformations naturelles. On appelle cette catégorie la catégorie des équivalences de Morita de A vers B.

Théorème 1. *La catégorie des équivalences de Morita de A vers B est équivalente à une sous-catégorie pleine de $B \otimes A^{opp} - mod$, où A^{opp} est l'algèbre opposée de A. Plus précisément, elle est équivalente à la sous-catégorie pleine dont les objets sont les $M \in Ob(B \otimes A^{opp} - mod)$ tels que M est un A^{op}-module projectif et un B-module projectif, $End_{A^{opp}-mod}(M) = B$, $End_{B-mod}(M) = A^{opp}$.*

Une autre description de cette catégorie peut être obtenue en prenant pour objets les A^{opp}-modules projectifs de type fini tels que $\exists n, A' \mid M^n = A^{opp} \oplus A'$ et $B = End_{A^{opp}-mod}(M)$.

Soit M un tel module projectif de type fini. On lui associe le foncteur

$$\mathcal{E} \mapsto M \otimes_A \mathcal{E} = M \otimes_k \mathcal{E}/(ma \otimes e - m \otimes ae)$$

de $A - mod$ vers $B - mod$. Ce foncteur est bien une équivalence de Morita.

Exercices

1) Soit M donné par $P = (p_{ij})$, $P^2 = P$, $M = PA^n$. Alors A^{opp} est facteur direct de copies de M si et seulement si

$$\exists X \in Mat_{N\times n}(A) \quad Y \in Mat_{n\times N}(A) \quad tq \quad tr(XPY) = 1$$

2) Ecrire le projecteur donnant $\tilde{M}$, foncteur inverse de $M \otimes_A \_$, où M est un module projectif de type fini.
Si $\tilde{M} \in Ob(A - mod - B)$, $M \otimes_A \tilde{M} \simeq B$ dans $B - mod - B$, $\tilde{M} \otimes_B M \simeq A$ dans $A - mod - A$.

Exemples d'algèbres Morita équivalentes

[3] compacte ?

[4] Théorème de Serre-Swan

1) Si X est une variété C^∞, $\mathcal{E}$ n'importe quel fibré vectoriel non trivial sur X, $C^\infty(X)$ est Morita équivalente à $End(\mathcal{E})$.
1') Si Γ est un groupe fini, $\mathbb{C}[\Gamma]$ est Morita équivalente à $\mathbb{C}^n$, où n est le nombre de représentations irréductibles de Γ.
2) Si X est une variété lisse et Γ un groupe fini agissant sur X, $C^\infty(X) \rtimes \mathbb{C}[\Gamma]$ est Morita équivalente à $C^\infty(X/\Gamma)$ dès que F agit librement. Si Γ n'agit pas librement, il vaut mieux considérer $C^\infty(X) \otimes \mathbb{C}[\Gamma]$ que $C^\infty(X/\Gamma)$, qui est un espace singulier.
3) Exemple (non trivial) du tore non commutatif, dû à M. Rieffel.
Soit t un paramètre réel. On considère

$$A_t := \{ \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} a_{nm} X^n Y^m \mid a_{nm} \in \mathbb{C} \;\; \forall k \; |a_{nm}| = O((1+|m|+|n|)^{-k}) \}$$

et A_t^f l'espace défini de la même façon en ne considérant que des sommes finies. On munit ces espaces d'une structure d'algèbre en posant $YX = e^{2\pi i t} XY$. Alors,

$$(X^{n_1} Y^{m_1})(X^{n_2} Y^{m_2}) = e^{2\pi i t m_1 n_2} X^{n_1+n_2} Y^{m_1+m_2}$$

A_t est isomorphe en tant qu'espace vectoriel topologique à $C^\infty(S^1 \times S^1) = A_0$ par la transformation de Fourier

$$\sum a_{nm} X^n Y^m \mapsto \sum a_{nm} e^{in\phi_1 + im\phi_2} \in C^\infty(S^1 \times S^1)$$

On voit sans peine $A_{t+1} \simeq A_t$. En fait, on a le théorème

Théorème 2. *A_t est Morita équivalente à $A_{\pm\frac{1}{t}}$. De façon générale, A_{t_1} est Morita équivalente à A_{t_2} si et seulement si il existe $(a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4$ tels que $t_2 = \frac{at_1+b}{ct_1+d}$ avec $ad - bc = \pm 1$.*

Un problème que [je] ne sais pas résoudre est d'écrire explicitement les (p_{ij}) étant donnés un A_t-module projectif.
<u>Pourquoi c'est moralement vrai :</u>
"Explication" : A_t est une complétion de $C^\infty(S) \otimes \mathbb{C}[\mathbb{Z}]$. En effet, $\{\sum a_{n0} X^n\} \simeq C^\infty(S^1)$ par transformation de Fourier ($X = e^{2i\pi\phi}$). En posant Y un générateur de $\mathbb{Z}$, et en le faisant agir par $YXY^{-1} = e^{2i\pi t} X$ on obtient une action de $\mathbb{Z}$ sur S^1 (rotation d'angle $2\pi nt$). En particulier, A_t^f s'identifie à $L \otimes \mathbb{C}[\mathbb{Z}]$ où L est l'espace des polynômes de Laurent sur S^1.
Si $t \notin \mathbb{Q}$, l'action se comporte mal. En gros, A_t correspond à des fonctions sur $S^1/\mathbb{Z}$, soit $\mathbb{R}/(2\pi(\mathbb{Z} + t\mathbb{Z}))$ ...

2.. Premiers exemples de catégories triangulées et équivalences de Morita dérivées

Les modules non projectifs sont <u>mauvais</u>. L'idée est que l'on peut toujours obtenir une résolution d'un A-module de dimension finie par d'autres A-modules ; la difficulté est que ces A-modules n'ont aucune raison d'être de dimension finie si le A-module de départ n'est pas projectif.

Définition 3. *On définit la catégorie dérivée de $A-mod$, notée $D^-(A-mod)$, dont les objets sont les complexes (C,d) de A-modules libres tels que $C^i = 0$ pour i assez grand. On note $\underline{Hom}^\bullet(C_1, C_2)$ le complexe d'espaces vectoriels défini par*

$$\underline{Hom}^k(C_1, C_2) = \prod_{n \in \mathbb{Z}} Hom(C_1^n, C_2^{n+k})$$

On a sur ce complexe une différentielle d définie par

$$d(\phi) = d_{C_2}\phi - (-1)^{deg \phi} \phi d_{C_3}$$

On a bien $d^2 = 0$. On peut alors définir [5]

$$Hom_{D^-(A-mod)}(C_1, C_2) := H^0(\underline{Hom}^\bullet(C_1, C_2))$$

On peut également définir une catégorie plus petite : on prend pour objets de $K^b(P_A)$ (K^b pour complexes bornés, P pour projectif) des complexes de longueur finie de A-modules projectifs de type fini.
De plus, si $(A^\bullet, d)$ est une algèbre différentielle graduée, i.e. $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A^n$ telle que $A^n A^m \subset A^{n+m}$, $d : A^n \to A^{n+1}$, $d^2 = 0$ et $d(fg) = (df)g + (-1)^{degf} f dg$, on définit les objets de $K^b(P_A)$ (K et b pour complexes bornés, et P pour projectif) comme les A-modules projectifs gradués de type fini dont la différentielle $d_M : M^n \to M^{n+1}$ vérifie

$$d_M(fm) = (D_A f)m + (-1)^{degf} f d_M m$$

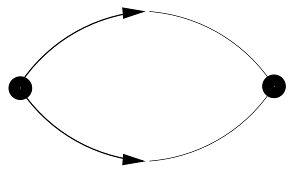
Exemple
Soit X une variété complexe. ($A^n = \Gamma(X, \Omega^{0,n})$ forme une algèbre différentielle graduée, avec $d = \bar\partial$, et pour produit le cup-produit des formes différentielles.

Théorème 1.

$$K^b(P_A) \simeq D^b(Coh\ X)$$

où X est une variété algébrique lisse et projective, $Coh\ X$ désigne la catégorie des faisceaux cohérents sur X, et A est défini comme précédemment.

On note Q le graphe suivant :



Le carquois Q fournit une description de $D^b(Coh\mathbb{C}P^1)$. On considère la catégorie des représentations de ce carquois c'est à dire des A_Q-modules, où A_Q, algèbre associée à ce carquois, est l'espace vectoriel $\mathbb{C}^4 = \mathbb{C}(\pi_1, \pi_2, f, g)$ muni de la structure d'algèbre

$$\pi_1^2 = \pi_1 \quad \pi_2^2 = \pi_2 \quad \pi_1\pi_2 = \pi_2\pi_1 = 0$$
$$\pi_1 + \pi_2 = 1 \quad \pi_1 f \pi_2 = f \quad \pi_1 g \pi_2 = g$$

Théorème 2.

$$K^b(P_{A_Q}) \simeq D^b(Coh\ \mathbb{C}P^1)$$

[5] On retrouve bien la définition classique (cf par exemple Verdier) des catégories dérivées : en degré 0, les cocycles sont les morphismes de complexes, et les cobords les morphismes homotopes à 0. Le foncteur de cette catégorie vers celle définie par Verdier est donc pleinement fidèle. Il est également essentiellement surjectif car il y a suffisamment de modules libres (cf Lang p836, preuve de la prop1.1).Il est également facile de vérifier directement que la composition est bien définie, et qu'elle est associative. En revanche, il faut une hypothèse supplémentaire pour définir D^b - question de dimension cohomologique finie ?

Références : Verdier, "Catégories dérivées" ; Gelfand-Manin ; SGA 4 et demi.

Dans ce qui va suivre, le support intuitif sera le cas particulier de la catégorie dérivée que l'on vient de construire.
On remarque au passage la propriété élémentaire suivante : si $C_1^\bullet$ et $C_2^\bullet$ sont des résolutions respectivement de M_1 et M_2,

$$\mathrm{Hom}_{\,D^-(A)}(C_1^\bullet, C_2^\bullet) = \mathrm{Hom}_{\,A}(M_1, M_2)$$

En fait, Verdier a défini une notion de catégorie dérivée $D^*(\mathcal{A})$, avec $* \in \{\emptyset, +, -, b\}$, à partir de complexes (C_n) vérifant $C^n = 0$ pout $n >> 0$ si $* = -$, pour $n << 0$ si $* = +$, et pour $|n| >> 0$ si $* = b$, ceci sur toute catégorie abélienne $\mathcal{A}$.

2.A.. **Première définition des catégories triangulées.** C'est la définition qu'on peut trouver dans Gelfand-Manin par exemple.

2.A.1). *Catégories triangulées.*

Définition 4. *Soit $\mathcal{D}$ une catégorie additive. On se donne un automorphisme additif T de $\mathcal{D}$ (et on note $T^n(X) = X[n]$; on appelle T un foncteur "schift"). Alors on appelle triangle dans la catégorie $\mathcal{D}$ toute suite de morphismes Δ : $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$. Un morphisme $\Delta \longrightarrow \Delta'$ de triangles est la donnée de trois morphismes rendant le diagramme suivant commutatif :*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\gamma"] & X[1] \arrow[d, "\alpha[1]"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r, "g'"] & Z' \arrow[r, "h'"] & X'[1] \end{tikzcd}$$

Exemple fondamental
Dans $\mathcal{D}^-(A)$, on pose :

$$T(C)^n = C[1]^n = C^{n+1} \text{ et } d^n_{C[1]} = -d^{n+1}_C$$

Voici un exemple particulier de triangle dans $\mathcal{D}^-(A)$: soit $C_1 \xrightarrow{f} C_2$ un morphisme dans $\mathcal{D}^-(A)$, on définit le complexe $Cone(f)$ par :

$$Cone(f)^i = C_1[1]^i \oplus C_2^i = C_1^{i+1} \oplus C_2^i \text{ et } d_{Cone(f)} = \begin{pmatrix} -d_{C_1} & 0 \\ f & d_{C_2} \end{pmatrix}$$

Par les morphismes canoniques d'injection et de projection, on obtient un triangle :

$$C_1 \xrightarrow{f} C_2 \xrightarrow{i} Cone(f) \xrightarrow{p} C_1[1]$$

(qui est d'ailleurs défini au niveau de la catégorie "naïve" des complexes). On appelle *triangle distingué* tout triangle isomorphe dans $\mathcal{D}^-(A)$ à un triangle de la forme ci-dessus.

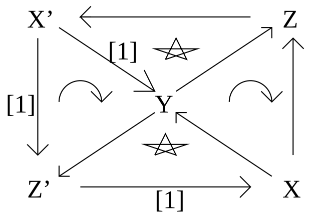
La classe des triangles distingués de $\mathcal{D}^-(A)$ vérifie les propriétés suivantes (Pour tous objets X, Y, Z et toutes flèches dans $\mathcal{D}^-(A)$) :

- **TR1** :
  - $X \xrightarrow{Id_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow X[1]$ est un triangle distingué. (Vérifier que $Cone(Id_X)$ est homotope à zéro.)
  - Tout triangle isomorphe à un triangle distingué est distingué.
  - toute flèche $X \xrightarrow{f} Y$ se "complète" à un triangle distingué $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$.

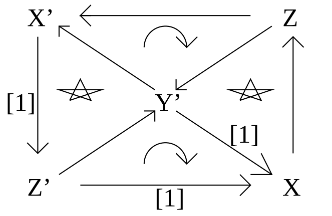
- **TR2** : $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$ est distingué si et seulement si $Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1] \xrightarrow{-f[1]} Y[1]$ est distingué. (Là encore on a besoin de “à homotopie près”).
- **TR3** : Soit Δ et Δ' deux triangles (X, Y, Z) et (X', Y', Z'), alors tout carré commutatif $\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & Y \arrow[d, "\beta"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \end{tikzcd}$ se complète en un morphisme de triangles

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, dotted, "\gamma"] & X[1] \arrow[d, "\alpha[1]"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r, "g'"] & Z' \arrow[r, "h'"] & X'[1] \end{tikzcd}$$

  Ce morphisme n'est pas unique [6], ce qui pose beaucoup de problèmes.
- **TR4** Propriété de l'octaèdre
  Un octaèdre est un diagramme octaédral portant sur 6 objets, que l'on décompose en moitié supérieure



  et moitié inférieure



  telles que les triangles étoilés soit distingués, que les autres soient commutatifs, et que le diagramme $\begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[d] \\ Z' \arrow[r] & Y' \end{tikzcd}$ soit commutatif. TR4 dit alors que tout diagramme du type “moitié supérieure” peut être complété en un octaèdre.

On peut s'inspirer de tout ça pour donner la définition :

Définition 5. *On appelle catégorie triangulée la donnée de*

- *Une catégorie additive $\mathcal{D}$.*
- *Un foncteur schift T. (*i.e. *un automorphisme additif de $\mathcal{D}$).*
- *Une classe de triangles (dont les éléments seront appelés* triangles distingués*) vérifiant les axiomes* **TR1** *à* **TR4** *ci-dessus.*

[6] cf Verdier ch2, 1.2.12 et suivants

On peut montrer beaucoup de choses en utilisant uniquement ces axiomes [7]. Par exemple [8]

Proposition 1. *Soit* $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$ *un triangle distingué, alors*

- $g \circ f = 0$ *et* $h \circ g = 0$.
- *Pour tout objet* U *de* $\mathcal{D}$*, on a une longue suite exacte*

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(U,X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(U,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(U,Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(U,X[1]) \cdots$$

- *De même avec* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(.,U)$.

Si $X \in Ob(\mathcal{D})$, il n'y a pas de moyen canonique de construire, à homotopie près, une algèbre différentielle graduée correspondant à $\underline{\mathrm{End}}\,(X)$.

2.A.2). *Algèbres différentielles graduées.* Soient B_1 et B_2 deux algèbres différentielles graduées. On dit que $B_1 \mathcal{R} B_2$ s'il existe une algèbre différentielle graduée C et deux quasi-isomorphismes :

$$B_1 \longleftarrow C \longrightarrow B_2$$

La relation $\mathcal{R}$ est réflexive et symétrique. On la complète en une relation d'équivalence (en forçant la transitivité) qu'on note encore $\mathcal{R}$.

Définition 6. *On dit que deux algèbres différentielles graduées (DG-algèbres)* $\mathcal{R}$*-équivalentes sont homotopiquement équivalentes.*

Si A est une k-algèbre et $C^\bullet$ un complexe de A-modules libres, alors $\underline{\mathrm{Hom}}_A(C^\bullet, C^\bullet)$ est une DG-algèbre.

Proposition 2. *Soit* $C_1^\bullet \xrightarrow{f} C_2^\bullet$ *un quasi-isomorphisme de complexes (*i.e. $Cone(f) \simeq 0$ *dans* $\mathcal{D}^-(A)$*) alors* $B_1 = \underline{\mathrm{Hom}}_A(C_1, C_1)$ *et* $B_2 = \underline{\mathrm{Hom}}_A(C_2, C_2)$ *sont homotopiquement équivalentes.*

Proof. Premier point : on peut trouver $C_3^\bullet$ et deux quasi-isomorphismes injectifs rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, hook, "qis"] & & C_2 \arrow[dl, hook', "qis"] \\ & C_3 & \end{tikzcd}$$

Pour cela, on prend $C_3^\bullet = C_1^\bullet \oplus Cone(f)$ soit, en tant qu'espace vectoriel $C_1^\bullet \oplus C_1^\bullet[1] \oplus C_2^\bullet$, muni de la différentielle

$$d_{C_3} = \begin{pmatrix} d_{C_1} & 0 & 0 \\ 0 & -d_{C_1} & 0 \\ 0 & f & d_{C_2} \end{pmatrix}$$

Deuxième point : on note B_3 la DG-algèbre associée à C_3 et B_3' sa sous-DG-algèbre stabilisant C_1 (naturellement injecté dans C_3). On a alors deux morphismes naturels

$$B_1 \longleftarrow B_3' \longrightarrow B_3$$

qui qui induisent des quasi-isomorphismes.

On fait de même pour B_2. $\square$

---

[7]et notamment les trois premiers, qui définissent ce que Verdier appelle une catégorie prétriangulée. La proposition suivante ne dépend que de TR1, TR2 et TR3. L'inconvénient de TR4 est, qu'en un certain sens, il n'est pas fonctoriel.

[8]cf Verdier ch2, 1.2.2 et 1.2.1

3.. Catégories triangulées précisées

Cette notion ('enhanced triangulated categories) est due à Bondal et Kapranov, 1990.

Définition 7. *Une catégorie différentielle graduée (DG-catégorie) est la donnée d'une catégorie k-linéaire $\mathcal{C}$ telle que pour tout couple (X, Y) d'objets de $\mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ soit muni d'une structure de complexe $(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)^n, d_{X,Y})$ et pour tout triplet (X, Y, Z), la composition induise un morphisme de complexes entre le complexe total associé à $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$. (*i.e. *$d(f \circ g) = df \circ g + (-1)^{deg(f)} f \circ dg$).*

Définition 8. *Si $\mathcal{C}$ est une DG-catégorie, on définit une nouvelle catégorie $H^0(\mathcal{C})$ par :*

- $\mathrm{Ob}(H^0(\mathcal{C})) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- $\mathrm{Hom}_{H^0(\mathcal{C})}(X, Y) = H^0(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y))$

Définition 9. *Soit $\mathcal{C}$ une DG-catégorie, on appelle complexe tordu la donnée d'une famille $(C^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ d'objets de $\mathcal{C}$ telle que $C^i = 0$ pour $|i| >> 0$ et d'une famille $\alpha_{ij} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C^i, C^j)^{j-i+1}$ telle que $\alpha_{ij} = 0$ pour $i \geqslant j$ et vérifiant l'équation [9] :*

$$\forall i < j, \quad \sum_{i<k<j} \alpha_{ik} \circ \alpha_{kj} + d_{C^i,C^j} \alpha_{ij} = 0$$

Affirmation 3. *Soit $\mathcal{C}$ une DG-catégorie, on peut définir une nouvelle DG-catégorie $Tw(\mathcal{C})$ dont les objets sont les complexes tordus et les morphismes sont donnés par :*

$$\mathrm{Hom}_{Tw(\mathcal{C})}((C_1, \alpha^1), (C_2, \alpha^2)) = \bigoplus_{i,j} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C_1^i, C_2^j)[j - i]$$

De plus, on a un foncteur canonique :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \to & Tw(\mathcal{C}) \\ C & \mapsto & C^0 = CC^i = 0, \alpha = 0 \end{array}$$

Affirmation 4. *Le foncteur $Tw(\mathcal{C}) \longrightarrow Tw(Tw(\mathcal{C}))$ est une équivalence de DG-catégories.*

Affirmation 5. *$H^0(Tw(\mathcal{C}))$ a une structure naturelle de catégorie triangulée.*

On peut en effet définir le cône d'un morphisme de complexe twisté.

Définition 10. *On appelle catégorie triangulée élargie la donnée de*

- *Une catégorie triangulée $\mathcal{D}$.*
- *Une DG-catégorie $\mathcal{C}$ telle que $\mathcal{C} \longrightarrow Tw(\mathcal{C})$ soit une équivalence de DG-catégories.*
- *Une équivalence de catégories triangulées $\mathcal{D} \longrightarrow H^0(\mathcal{C})$.*

Un intérêt de cette construction est d'avoir une bonne notion de générateurs d'une catégorie triangulée :

Proposition 1. *Dans le contexte de la définition précédente, soit $(X_i)_{i\in I}$ une collection d'objets de $\mathcal{C}$ engendrant la sous-DG-catégorie $\mathcal{C}_I$ de $\mathcal{C}$ et $([X_i])$ les mêmes objets vus dans $\mathcal{D}$ via les équivalences $\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} Tw(\mathcal{C})$ et $H^0(Tw) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}$. Alors la sous-catégorie pleine triangulée minimale de $\mathcal{D}$ contenant les $[X_i], i \in I$ est équivalente à $H^0(Tw(\mathcal{C}_I))$.*

[9] Cette équation s'écrit plus sobrement $d\alpha + \alpha.\alpha = 0$. C'est l'équation "de courbure nulle" en géométrie différentielle

On peut appliquer ceci à $\mathcal{D}^b(Coh(\mathbb{C}P^1))$.

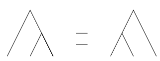
Remarque : Un défaut de ces concepts est que les constructions de quotients de catégories triangulées ne s'étendent pas aux catégories triangulées élargies.

3.A.. $\mathcal{A}_\infty$**-catégories.**

Définition 11. *Un monoïde est un ensemble X muni d'une loi de composition $X \times X \xrightarrow{\circ} X$, une unité 1 et vérifiant les axiomes :*
- $\forall f, g, h \in X, \quad (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
- $\forall f \in X, \quad f \circ 1 = 1 \circ f = f$

Le premier de ces axiomes est l'associativité. Elle est liée au TEMPS.

On peut se représenter l'associativité par la relation d'équivalence sur les arbres binaires planaires finis qui identifie :



Lemme 1. *Avec cette relation d'équivalence, tous les arbres sont équivalents.*

Pour faire le produit d'une famille finie $(f_s)_{s \in S}$ d'éléments de X, il faut choisir un ordre sur S, c'est à dire une composante connexe de $E_S = Emb(S, \mathbb{R})$ (Plongements de S dans $\mathbb{R}$). On peut compactifier E_S de telle sorte que le bord corresponde à des arbres binaires planaires finis :

Si $S = \{1 \cdots n\}$, on pose :

$$C_n = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \;\; x_1 < x_2 < \cdots < x_n\} / \mathrm{Aff}_+(1, \mathbb{R})$$

On peut alors définir le plongement suivant :

$$\begin{array}{ccc} C_n & \to &]0,1[^{C_n^3} \\ x & \mapsto & \left(\frac{x_j - x_i}{x_k - x_i}\right)_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} \end{array}$$

On note $\overline{C_n}$ l'adhérence de C_n dans $[0,1]^{C_n^3}$. C'est un polytope dont les sommets parmètrent les arbres planaires binaires à n feuilles. Le lemme précédent se déduit du suivant :

Lemme 2. *$\overline{C_n}$ est contractile.*

Les $\overline{C_n}$ sont appelés *polytopes de Stasheff*. Le polytope $\overline{C_n}$ est de dimension $n-2$, et le nombre des sommets de $\overline{C_{n+1}}$ est le nombre de Catalan $\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$

exemples :

Si $n \geqslant 2$ la frontière $\delta\overline{C_n}$ se décompose:

$$\delta\overline{C_n} = \bigcup_{\substack{k,l\geqslant 2\\ k+l=n+1}} \bigcup_{i=0}^{n-l} \text{de copies de } \overline{C_k} \times \overline{C_l}$$

Définition 12. *Un $\mathcal{A}_\infty$-espace est un espace topologique muni d'applications m_n de $\overline{C_n} \times X^n$ vers X, pour $n = 2, 3, \dots$ qui vérifient la condition d'associativité suivante: la restriction f de m_n à la i^{ieme} composante $\overline{C_k} \times \overline{C_l}$ de $\delta\overline{C_n}$ vérifie, pour $p_1 \in C_k$, $p_2 \in C_l$ et $x_1, \dots, x_n \in X$:*

$$f(p_1, p_2, x_1, \dots, x_n) = m_k(p_1, x_1, \dots, x_i, m_l(p_2, x_{j+1}, \dots, x_{j+l}), \dots, x_n).$$

Pour $n = 2$, m_2 est simplement une application de X^2 dans X.

Pour $n = 3$, $t \mapsto m_3(t, x_1, x_2, x_3)$ est un chemin reliant $m_2(m_2(x_1, x_2), x_3)$ à $m_2(x_1, m_2(x_2, x_3))$.

Exemple 1. *: Un semi-groupe topologique peut-être muni canoniquement d'une $\mathcal{A}_\infty$-structure: On définit m_n comme la multiplication des n termes, indépendamment de la variable $p \in \overline{C_n}$*

Théorème 1.
- *1) Soit X un semi-groupe topologique et Y un espace homotopiquement équivalent à X. On peut alors munir Y d'une $\mathcal{A}_\infty$-structure.*
- *2) Tout $\mathcal{A}_\infty$-espace est $\mathcal{A}_\infty$-équivalent à un semi-groupe topologique.*

Cette idée motive la définition qui suit

Définition 13. *Une $\mathcal{A}_\infty$-catégorie $\mathcal{C}$ sur un corps k est la DONNÉE*
- *d'une collection d'objets $\mathcal{O}b\,\mathcal{C}$;*
- *pour deux objets E et F de $\mathcal{O}b\,\mathcal{C}$ d'un espace vectoriel $\mathbb{Z}$-gradué $\underline{\mathrm{Hom}}^{\bullet}_{\mathcal{C}}(E, F)$;*
- *pour un objet E de $\mathcal{O}b\,\mathcal{C}$ d'un élément Id_E de $\underline{\mathrm{Hom}}^{0}_{\mathcal{C}}(E, E)$.*
- *d'une loi de composition d'ordre superieur, c'est-à-dire pour tout $n = 1, 2, \dots,$ et pour toute famille d'objets $E_0, \dots, E_n$, d'un morphisme*

  $$m_n : \quad \underline{\mathrm{Hom}}\,(E_0, E_1) \otimes \cdots \otimes \underline{\mathrm{Hom}}\,(E_{n-1}, E_n) \to \underline{\mathrm{Hom}}\,(E_0, E_n)[2-n].$$

  (remarque: $2 - n = -\dim \overline{C_n}$.)

Ces données sont soumises aux AXIOMES suivants:
- *A) (associativité d'ordre supérieur) Pour tout $n = 1, 2, \dots,$ pour toute famille de n flèches composables $L_1, \dots, L_n$*

$$0 = \sum_{\substack{k,l\geqslant 1\\ k+l=n+1}} \sum_{j=0}^{n-l} (-1)^{signe} m_k(L_1 \otimes \cdots \otimes L_j \otimes m_l(L_{j+1} \otimes \cdots \otimes L_{j+l}) \otimes \cdots \otimes L_n),$$

  où le signe est $signe = l\sum_{i=1}^{j} \deg(L_i) + (j+1)(l+1)$
- *B) Si $n \neq 2$, $m_n(\cdots \otimes Id_{E_i} \otimes \dots) = 0$. Si $n = 2$, $m_2(L \otimes Id) = m_2(Id \otimes L) = L$.*

Interprétons les axiomes pour n petit. Pour $n = 1$ l'axiome A donne $-m_1(m_1(L)) = 0$, donc $m_1 : \underline{\mathrm{Hom}}^{\,k}(E, F) \to \underline{\mathrm{Hom}}^{\,k+1}(E, F)$ est une dérivation, et on voit que les $\underline{\mathrm{Hom}}^{\,k}(E, F)$ sont des complexes différentiels.

Pour $n = 2$, on obtient

$$-m_1(m_2(L_1 \otimes L_2)) + m_2(m_1(L_1) \otimes L_2) + (-1)^{\deg L_1} m_2(L_1 \otimes m_1(L_2)),$$

ce qui siginifie exactement que $m_2 : \underline{\mathrm{Hom}}\,(E_0, E_1) \otimes \underline{\mathrm{Hom}}\,(E_1, E_2) \to \underline{\mathrm{Hom}}\,(E_0, E_2)$ est un morphisme de complèxes *différentiels.*

Nous n'écrirons l'axiome A pour $n = 3$ qu'en supposant $m_3 = 0$. On obtient alors, $m_2(m_2(L_1 \otimes L_2) \otimes L_3 - m_2(L_1 \otimes m_2(L_2 \otimes L_3)) = 0$, autrement dit, m_2 est associative (au sens usuel) si m_3 est nul.

Plus généralement, on voit facilement en s'aidant des remarques précédentes qu'il revient au même de se donner une DG-catégorie ou une $\mathcal{A}_\infty$-catégorie avec $m_3 = m_4 = \cdots = 0$.

Enfin, l'axiome B signifie simplement que $m_1(Id) = 0$ et que Id est neutre pour la composition.

Définition 14. *Soit $\mathcal{C}$ une $\mathcal{A}_\infty$-catégorie. On définit* [10]
la catégorie k-linéaire $H^0(\mathcal{C})$ par $Ob(H^0(\mathcal{C})) := \mathcal{O}b(\mathcal{C})$ et $\mathrm{Hom}_{H^0(\mathcal{C})}(E,F) = H^0(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(E,F))$.

A la place des $\mathcal{A}_\infty$-catégorie, on peut considérer la notion de catégorie $\mathcal{A}_\infty$ faible : on ne demande plus l'existence d'une unité, et on remplace l'axiome B par l'hypothèse que $H^0(\mathcal{C})$ est une catégorie, i.e. qu'elle a des flèches identité.

Définition 15. *Un $\mathcal{A}_\infty$-foncteur $\mathcal{F}$ de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{B}$ est la donnée*

- *d'une "application" $\mathcal{F}$ de $\mathcal{O}b\,\mathcal{A}$ vers $\mathcal{O}b\,\mathcal{B}$.*
- *pour tout $n \geqslant 1$ et pour toute famille $E_0, \ldots, E_n$ d'objets de $\mathcal{A}$ d'un morphisme $\mathcal{F}_n$ de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{A}}(E_0,E_1) \otimes \cdots \otimes \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{A}}(E_{n-1},E_n)$ vers $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}(E_0), \mathcal{F}(E_n)[1-n])$*

Ces données sont soumises aux axiomes suivants:

- *A) Pour toute famille de n ($n \geqslant 1$) flèches composables, FIGURE*
- *B) $\mathcal{F}_1(Id_E) = Id_{\mathcal{F}(E)}$. $\mathcal{F}_{>1}(\cdots \otimes Id \otimes \ldots) = 0$.*

Corollaire 1. *Si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{A}_\infty$-fonteur, $\mathcal{F}_1$ est un morphisme de complexe, et $H^0(\mathcal{F}_1)$ de $H^0(\mathcal{A})$ vers $H^0(\mathcal{B})$ est un foncteur.*

Définition 16. *Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'objets d'une $\mathcal{A}_\infty$-catégorie $\mathcal{A}$. On dit que les E_i sont tous-isomorphes si il existe un $\mathcal{A}_\infty$-foncteur $\mathcal{F}$ de la catégorie $\mathcal{I}$ vers $\mathcal{A}$, tel que $\mathcal{F}(i) = E_i$. Ici la $\mathcal{A}_\infty$-catégorie $\mathcal{I}$ est définie ainsi: ces objets sont les $i \in I$, on a $\mathrm{Hom}(i,j) = 0$ si $i \neq j$ et $\mathrm{Hom}(i,i) = kId$. m_2 est l'identit'e et m_n est nul pour $n \neq 2$.*

On peut montrer qu'un objet est toujours isomorphe à lui même.

Voici un exemple topologique: si X et Y sont deux espaces topologiques, dire qu'ils sont homotopiquement équivalent signifie qu'il exsite une application continue f de X vers Y et une autre g de Y vers X, telles que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont homotopes à l'identité. Si l'on choisit deux telles homotopies, on voit qu'on obtient deux homotopies de $f \circ g \circ f$ avec f, donc un lacet d'extremité f. Et ce lacet n'est pas forcément contractible.

Affirmation 6.

- *On peut composer les $\mathcal{A}_\infty$-foncteurs. La composition est associative (au sens usuel).*
- *Soit $\mathcal{A}$ une petite $\mathcal{A}_\infty$ catégorie et $\mathcal{B}$ une $\mathcal{A}_\infty$-catégorie. On peut définir une nouvelle $\mathcal{A}_\infty$-catégorie $\mathrm{Fun}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ dont les objets sont les $\mathcal{A}_\infty$-foncteurs de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{B}$ et les morphismes $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{A},\mathcal{B})}(\mathcal{F},\mathcal{G}) = \prod_{E \in \mathcal{O}b\,\mathcal{A}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}(E), \mathcal{G}(E))$*

Exercice 1. *Démontrer ces affirmations*

---

[10] Pour montrer que l'on obtient bien une catégorie, on remarque que m_2 est un morphise de complexes différentiel, donc induit une flèche au niveau des H^0 donc une flèche de $\mathrm{Hom}_{H^0(\mathcal{C})}(E,F) \otimes \mathrm{Hom}_{H^0(\mathcal{C})}(F,G) \to \mathrm{Hom}_{H^0(\mathcal{C})}(E,G)$ qui donne la composition des morphismes dans $\mathcal{C}$. Comme Id est fermé dans $\underline{\mathrm{Hom}}(E,E)$ il a une image dans le H^0 et l'axiome B dit simplemnt que c'est un élélement neutre pour la composition des morphismes dans $H^0(\mathcal{C})$.

Enfin, on peut remarquer que le H^0 d'une DG-catégorie, ou de la même catégorie vue vomme une A_∞-catégorie sont égales.

Définition 17. *Un $\mathcal{A}_\infty$-fonteur $\mathcal{F}$ de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{B}$ est une équivalence de catégorie si il existe un $\mathcal{A}_\infty$-foncteur $\mathcal{G}$ de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{A}$ tel que $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ est isomorphe à $Id_{\mathcal{A}}$ dans* $\mathrm{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ *et $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ est isomorphe à $Id_{\mathcal{B}}$ dans* $\mathrm{Fun}(\mathcal{B}, \mathcal{B})$.

Théorème 2. *Un $\mathcal{A}_\infty$-foncteur $\mathcal{F}$ est une équivalence si et seulement si $\mathcal{F}$ induit une bijection au niveau des classes d'isomorphismes d'objet et $\mathcal{F}_1$ est un quasi-isomorphisme de complèxes.*

Théorème 3 (Modèles minimaux)**.** *Soit $\mathcal{A}$ une $\mathcal{A}_\infty$-catégorie. Il existe une $\mathcal{A}_\infty$-catégorie équivalente $\mathcal{A}_{min}$ pour laquelle $m_1 = 0$ et $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{A}_{min}}(E, F) \simeq H^\bullet(\underline{\mathrm{Hom}}^{(}_{\mathcal{A}}E, F))$.*

Corollaire 2. *Si $H^i(\underline{\mathrm{Hom}}(E, F)) = 0$ pour tout E, F et tout $i \neq 0$ alors $\mathcal{A}_{min}$ est une catégorie k-linéaire ($m_n = 0$ pour $n \neq 2$).*

Nous allons maintenant définir la notion de complexe tordu dans une $\mathcal{A}_\infty$-catégorie.

Définition 18. *Soit $\mathcal{A}$ une $\mathcal{A}_\infty$-catégorie. Un complèxe tordu dans $\mathcal{A}$ consiste en la donnée d'une famille (E_i) d'objets de $\mathcal{A}$, pour $i = 1, \ldots, k$ (k fini), d'entiers $n_i \in \mathbb{Z}$, et, pour $i < j$ de morphismes $\alpha_{i,j} \in \underline{\mathrm{Hom}}^{n_j - n_i + 1}(E_i, E_j)$ qui vérifient $\sum_{n=1}^{\infty} m_n(\alpha \otimes \cdots \otimes \alpha) = 0 \in \underline{\mathrm{Hom}}^2(E, E)$.*

Affirmation 7.
- *On peut munir la collection des complexes tordus $Tw(\mathcal{A})$ d'une structure de $\mathcal{A}_\infty$-catégorie.*
- *$H^0(Tw(\mathcal{A}))$ est une catégorie triangulée.*
- *Le foncteur naturel $Tw(\mathcal{A}) \hookrightarrow Tw(Tw(\mathcal{A}))$ est une équivalence.*

Ceci permet de définir une catégorie triangulé précisée comme le $H^0(Tw(\mathcal{A}))$ d'une $\mathcal{A}_\infty$-catégorie, où l'on n'a pas oublié la catégorie $\mathcal{A}$.

Exemple 2. Les carquois. *Ce sont des graphes finis orientés Q, c'est-à-dire la donnée d'un ensemble de sommets S et d'arêtes A, et d'une application "extremités" de A vers $S \times S$. Si Q est un carquois, on note Rep(Q) la catégorie abélienne des représentations de Q, i.e. des familles d'espace vectoriels V_s pour $s \in S$ et de flèches linéaires $V_s \to V'_s$ pour toute fleche a de s vers s', vérifiant les propriétés évidentes.*

Un carquois Q n'a pas de cycle si et seulement si $\dim P_A < \infty$ ce qui équivaut au fait que tout objet dans RepQ a une résolution de longueur finie par des modules projectifs de type finis

4.. Modèles minimaux $\mathcal{A}_\infty$

Le formalisme des $\mathcal{A}_\infty$-catégories permet de bien exprimer ce qui touche aux modèles minimaux.

Soit A une DG-algèbre sur k (c'est la même chose qu'une DG-catégorie avec un seul objet). Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{Z}$-gradué $H^\bullet = \oplus H^i(A)$. Nous allons le munir d'opérations de Massey et d'une structure de Massey :

Choisissons une décomposition $A^\bullet = H^\bullet \oplus A_0 \oplus A_1$ telle que $d_{|H^\bullet} = 0$ et que d soit un isomorphisme de A_0 sur A_1.

Proposition 1. *Il est possible de construire*

- *Une structure de $\mathcal{A}_\infty$-algèbre sur $H^\bullet$ telle que $m_1 = 0$ et que m_2 soit le produit dans la cohomologie, avec $m_3, \dots : H^{\otimes 3} \to H[-1]$.*
- *Un $\mathcal{A}_\infty$-foncteur $\mathcal{F} : H^\bullet \to A^\bullet$.*

(On considère ici que chaque algèbre est une $\mathcal{A}_\infty$-catégorie avec un seul objet)

Proof. Nous avons à résoudre une suite d'équations dont les inconnues sont les m_n et les $\mathcal{F}_n$.

Associativité pour la $\mathcal{A}_\infty$-catégorie $H^\bullet$

$$\sum_{\substack{k,l\geqslant 2\\ k+l=N}} \pm m_k(\dots, m_l(\dots), \dots) = 0 \tag{1}$$

(voir plus haut pour l'interprétation graphique des termes de cette somme)

Fonctorialité $\mathcal{A}_\infty$ pour $\mathcal{F}$

$$\sum m_i(\mathcal{F}(\dots), \mathcal{F}(\dots), \dots, \mathcal{F}(\dots)) = \sum \pm \mathcal{F}(\dots, m^H(\dots), \dots) \tag{2}$$

Dans A, on a $m_{>2} = 0$, donc la dernière équation devient :

$$d\mathcal{F}_n(\dots) = \sum_{\substack{k,l\geqslant 1\\ k+l=N}} \pm \mathcal{F}_k(\dots)\mathcal{F}_l(\dots) + \sum_{\substack{\tilde{k},\tilde{l}\geqslant 1\\ \tilde{k}+\tilde{l}=N+1}} \mathcal{F}_{\tilde{k}}(\dots, m_{\tilde{l}}(\dots)) + \mathcal{F}_1(m_1(\dots)) \tag{3}$$

Nous allons construire une solution par récurrence sur N.

Initialisons en prenant pour $\mathcal{F}_1$ l'injection de $H^\bullet$ dans $A^\bullet$ et $m_1 = 0$. Supposons maintenant déjà construits $\mathcal{F}_k$ et m_k pour $k < n$. On a alors :

$$d(\underbrace{\sum_{\substack{k,l\geqslant 1\\ k+l=N}} \pm \mathcal{F}_k(\dots)\mathcal{F}_l(\dots) + \sum_{\substack{\tilde{k},\tilde{l}\geqslant 1\\ \tilde{k}+\tilde{l}=N+1}} \mathcal{F}_{\tilde{k}}(\dots, m_{\tilde{l}}(\dots))}_{\text{Vieux termes } (X_n)}) = 0 \tag{4}$$

Définissons $m_n(\dots) = -\pi_H(X_n)$ et $\mathcal{F}_n = d^{-1}(X_n)$. Nous avons à vérifier l'associativité (équation 1). Nous le faisons ici pour $n = 2$:

Nous avons $m_2(a_1 \otimes a_2) = \pi_H(a_1, a_2)$. Pour des $a_i \in H \subset A$, avons-nous $\pi_H(\pi_H(a_1, a_2), a_3) - \pi_H(a_1, \pi_H(a_2, a_3)) = 0$ C'est $\pi_H(\pi_H(a_1, a_2)a_3 - a_1\pi_H(a_2, a_3))$.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2(a_1 \otimes a_2) &:= d^{-1}(a_1a_2 - \pi_H(a_1a_2)) \\ (d\mathcal{F}_2(a_1 \otimes a_2) - a_1a_2)a_3 + a_1(d\mathcal{F}_2(a_2, a_3) - a_2a_3) &= d(\mathcal{F}_2(a_1a_2)a_3 - a_1\mathcal{F}_2(a_2a_3)) \end{aligned}$$

$\square$

5.. Définition alternative des $\mathcal{A}_\infty$-algèbres

Une façon peut-être plus intelligente de considérer les $\mathcal{A}_\infty$-algèbres est la suivante[11]

Définition 19. *Une $\mathcal{A}_\infty$-algèbre A donnée par :*

[11] Ce qui suit est exactement la même chose que ce qu'il y a dans l'article sur la quantification des variétés de Poisson, sauf que les cogèbres ne sont plus ici cocommutatives

- *un espace vectoriel $\mathbb{Z}$-gradué $A^\bullet$.*
- *la cogèbre graduée coassociative colibre sans coünité $C^\bullet := \oplus \otimes_{n=1}^{n}(A[1])$.*
- *une codérivation d de degré 1 de $C^\bullet$ telle que $d^2 = 0$.*

La cogèbre C étant colibre, la codérivation d est définie par sa “corestriction” aux cogénérateurs. $C^\bullet \xrightarrow{d} C^\bullet[1] \xrightarrow{\pi_1} A[2]$ (ici π_n désigne la projection de $C^\bullet$ sur son n^e facteur).

Comme $C^\bullet$ est une somme directe, se donner cette “corestriction” est équivalent à se donner une suite d'applications linéaires $m_n : A^{\otimes n}[n] \to A[2]$.

La condition $d^2 = 0$ est alors équivalente à l'associativité pour les m_n, comme dans la $\mathcal{A}_\infty$-catégorie dont le seul objet est A.

Définition 20. *Un $\mathcal{A}_\infty$-morphisme $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est un morphisme de cogèbres graduées de degré 0 qui commute aux codérivations.*

Une fois explicitée la condition de commutation, on trouve une série d'équations qui correspond à son homologue pour les $\mathcal{A}_\infty$-foncteurs.

Pour ce qui est des unités (dont nous n'avons pas tenu compte jusqu'à présent), il faut les traiter à part par une décomposition en somme directe.

6..

Rappelons que deux objets E et F d'une $\mathcal{A}_\infty$-catégorie $\mathcal{A}$ sont dits équivalents síl existe un $\mathcal{A}_\infty$-foncteur de la $\mathcal{A}_\infty$-catégorie à deux objets $(\bullet_1, \bullet_2)$ dont les seuls morphismes sont les identités, un isomorphisme entre les deux objets et sa réciproque, qui envoie $\bullet_1$ sur E et $\bullet_2$ sur F. On note alors $E \sim F$.

Théorème 1. *Soient E et F deux objets d'une $\mathcal{A}_\infty$-catégorie $\mathcal{A}$. E et F sont équivalents ssi ils sont isomorphes dans la catégorie $\mathcal{H}^0(\mathcal{A})$*

Le même phénomène se produit déjà en théorie de l'homotopie.

Exemple simple

Soit $\mathcal{A}$ une DG-catégorie et supposons que E et F sont isomorphes dans $\mathcal{H}^0(\mathcal{A})$. On a donc X et Y éléments respectifs de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{A}}^0(E,F)$ et $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{A}}^0(F,E)$ tels que

- $dX = dY = 0$ (ce sont des morphismes de complexes).
- $X \circ Y - 1_E \in \operatorname{Im} d$ et $Y \circ X - 1_F \in \operatorname{Im} d$ (ce sont des quasi-isomorphismes quasi-inverses l'un de l'autre)

Il existe donc $\alpha \in \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{A}}^{-1}(F,E)$ et $\beta \in \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{A}}^{-1}(E,F)$ tels que $X \circ Y = 1 + d\alpha$ et $Y \circ X = 1 + d\beta$.

Nous pourrions être gênés, car on a $d(\alpha X - X\beta) = 0$, mais un cocycle n'est pas forcément nul ...

Construisons un $\mathcal{A}_\infty$-foncteur de la catégorie à deux objets dans $\mathcal{A}$:

$$\begin{array}{lcllcl} \mathcal{F}_1(\bullet_1) & = & \tilde{X} & \mathcal{F}_1(\bullet_2) & = & \tilde{Y} \\ \mathcal{F}_2(\bullet_2 \otimes \bullet_1) & = & \tilde{\alpha} & \mathcal{F}_2(\bullet_1 \otimes \bullet_2) & = & \tilde{\beta} \end{array}$$

$$\mathcal{F}_n(\bullet_1 \otimes \bullet_2 \otimes \bullet_1 \cdots \otimes \bullet_2 \otimes \bullet_1) = 0(?)$$

Les équations à satisfaire sont :

$$\begin{array}{lcllcl} d\tilde{X} & = & 0 & d\tilde{Y} & = & 0 \\ \tilde{X}\tilde{Y} & = & 1 + d\tilde{\alpha} & \tilde{Y}\tilde{X} & = & 1 + d\tilde{\beta} \end{array}$$

$$\tilde{\alpha}\tilde{X} - \tilde{X}\tilde{\beta} = d\mathcal{F}_3(\bullet_2 \otimes \bullet_1 \otimes \bullet_2)$$

Voici des formules explicites qui donnent une solution :

$$\begin{array}{lcllcl} \tilde{X} & = & X & \tilde{Y} & = & Y \\ \tilde{\alpha} & = & \alpha + X\beta Y - \alpha XY & \tilde{\beta} & = & \beta \end{array}$$

On a en effet :

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}\tilde{X}-\tilde{X}\tilde{\beta} &= \alpha X+\alpha X\beta Y-\alpha XYX-X\beta\\ &= d(\alpha X\beta - X\beta\beta)\end{aligned}$$

7.. $\mathcal{A}_\infty$-catégories saturées

Nous partons des variétés algébriques. On construit à partir de cela des DG-catégories et des $\mathcal{A}_\infty$-catégories. Finalement, le foncteur $\mathcal{H}^0$ nous envoie dans les catégories triangulées[12].

Définition 21. *Une $\mathcal{A}_\infty$-catégorie est dite* **de type fini** *ssi pour tous objets E et F,*

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} \operatorname{rg} H^i(\underline{\mathrm{Hom}}\,(E,F)) < \infty$$

Notons $\bullet_k$ la $\mathcal{A}_\infty$-catégorie des complexes bornés d'espaces vectoriels de dimension finie. On s'intéresse au foncteur :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^{opp} &\xrightarrow{\mathcal{F}} \mathrm{Fun}(\mathcal{A},\bullet_k)\\ E &\longmapsto (F\longmapsto \underline{\mathrm{Hom}}^{\bullet}_{\mathcal{A}}(E,F))\end{aligned}$$

Il reste du travail pour le définir sur les morphismes.

Définition 22. *Une $\mathcal{A}_\infty$-catégorie $\mathcal{A}$ est dite* **saturée** *ssi elle est de type fini, $\underline{\mathrm{Hom}}^{\bullet}(E,F) < \infty$ pour touss objets E et F de $\mathcal{A}$ (c'est automatique) et si le foncteur $\mathcal{F}$ est une équivalence de catégories.*

En quelque sorte, une $\mathcal{A}_\infty$-catégorie est saturée ssi tous les foncteurs sont "représentables"

8.. Exemples de $\mathcal{A}_\infty$-catégories saturées

8.A.. **Carquois fini dirigé.** Soit Q un carquois fini et dirigé. Considérons les représentations de Q, c'est à dire les modules sur l'algèbre P_Q (qui est de dimension finie). La catégorie des complexes finis de P_Q-modules de type fini est saturée.

8.B.. **Faisceaux cohérents sur une variété projective.** Soit X une variété algébrique projective et lisse. $\mathcal{D}^b(\mathcal{C}\mathrm{oh}(X))$ est une catégorie triangulée, que l'on peut remonter en une DG-catégorie[13]. Supposons que k soit égal à $\mathbb{C}$. On a une structure de catégorie triangulée sur $\mathcal{D}^b(\mathcal{C}\mathrm{oh}(X))$. Considérons la catégorie dont les objets sont les complexes finis de fibrés vectoriels holomorphes sur X et telle que, si E et F sont des objets :

$$\mathrm{Hom}\,(E^\bullet,F^\bullet) = H^0_{\mathrm{tot}}(\Gamma(X,(E^\bullet)^* \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} F^\bullet \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \Omega^{0,\bullet}),\bar{\partial})$$

(la différentielle est celle des formes différentielles). Le fait de considérer des complexes totals fait que c'est une DG-catégorie, qui est isomorphe à la catégorie des complexes tordus.

Il est par ailleurs possible de construire beaucoup de catégories de type fini, mais non saturées. Par exemple, considérons les complexes finis d'espaces vectoriels de dimension finie $C^\bullet$ tels que $\partial(C) = \sum(-1)^i + kC^i \in 2\mathbb{Z}$ (...)

[12]voir Bondal & Kapranov : "Non commutative smooth projective varieties"

[13]C'est un théorème profond

9.. Quelques exemples de carquois

9.A.. Carquois orientés avec relations.

Définition 23. *Un carquois orienté avec relations est donné par une algèbre $A_Q = P_Q/I$, où Q est un carquois orienté et I est un idéal bilatère engendré des combinaisons linéaires de chemins de longueur au moins 2.*

Par exemple, on peut prendre pour I l'idéal engendré par $\alpha\beta - \gamma\delta$ si Q contient la figure suivante :

Notons V l'ensemble des sommets du carquois.

Affirmation 8. *Les A_Q-modules irréductibles sont en bijection avec les éléments de V.*

On note S_v le module irréductible correspondant à $v \in V$.

On peut également définir une application $v \mapsto \pi_v$ de V dans A_Q telle que :

$$\pi_v^2 = \pi_v \qquad \pi_v \pi_{v'} = 0 \text{ pour } v \neq v' \qquad S_v = \pi_v A_Q \pi_v$$

Affirmation 9. *Les A_Q-modules projectifs indécomposables sont aussi en bijection avec les sommets du carquois, et ce sont les $A\pi_v$.*

Ils apparaissent avec la multiplicité 1 dans la représentation régulière.

Affirmation 10. *Tout A_Q-module a une résolution finie par des modules projectifs.*

9.B.. Foncteurs de réflexion. (Bernstein, Gelfand, Pomonarev)

Ici nous revenons au cas des carquois sans relations. Soit v un sommet du carquois auquel n'aboutit aucune flèche. Il est possible de fabriquer un nouveau carquois $\tilde{Q}$ en renversant le sens de toutes les flèches partant de v. On définit ainsi un foncteur entre les catégories de représentations :

Soit M une représentation de Q. Notons $M_v = \pi_v M$ et $f_i : M_v \xrightarrow{f_i} M_i, 1 \leqslant i \leqslant n$ les flèches partant de v (on a $M_i = \pi_{v_i} M$). $\sum f_i$ est une application de M_v dans $\bigoplus M_i$. On construit alors la représentation $\tilde{M}$ de $\tilde{Q}$ par $\widetilde{M_u} = M_u$ si $u \neq v$ et $\widetilde{M_v} = \mathit{coker}(\sum f_i)$.

$\tilde{M}$ est alors un bimodule universel $\otimes M$[14]

Le bimodule universel est un objet de la catégorie $P_{\tilde{Q}} - \mathrm{Mod} - P_Q$. Ce n'est pas un foncteur exact.

Pour en faire un foncteur de DG-catégories, il faut emplacer le bimodule par une résolution projective finie.

Théorème 1. *Ce foncteur est une équivalence de DG-catégories.*

En effet il existe un inverse explicite (remplacer conoyaux par noyaux ...)

Corollaire 3. *Tout arbre fini permet de construire de manière canonique une DG-catégorie. Il n'y a pas de problème d'orientation.*

Le cas le plus simple est celui du carquois $\bullet \to \bullet$ (le diagramme de Dynkin A_2). On peut effectuer la reflexion en 1, ce qui le transforme en $\bullet \leftarrow \bullet$.

Exercice Véfifier que la composition suivante donne le foncteur [2]

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \\ B & & B \end{array}$$

[14]? Problème de note, sans doute

Si nous considérons la catégorie des foncteurs des représentations de ce carquois dans une $\mathcal{A}_\infty$-catégorie $\mathcal{C}$, i.e. $\mathrm{Fun}(\mathrm{Repr}\, Q, \mathcal{C})$. Dans cette catégorie, les classes dequivalence d'objets correspondent aux classes de morphismes dans $H^0(\mathcal{C})$.

... La suite est trop confuse dans les notes pour être exploitable telle quelle.

Géométrie algébrique d'un point de vue non-commutatif
(d'après l'école de Moscou: Bondal, Kapranov, ...)

Si X est une variété algébrique lisse sur un corps k, on pose $D(X) = D^b(\mathrm{Coh}X)$. C'est une catégorie triangulée.

En pratique, un foncteur $F : D(X) \to D(Y)$ provient d'un noyau, c'est-à-dire qu'il existe $\mathcal{F} \in \mathrm{Ob}(D(X \times Y))$ tel que pour $\mathcal{E} \in \mathrm{Ob}(D(X))$ on ait $F(\mathcal{E}) = p_{Y*}(\mathcal{F} \otimes p_X^* \mathcal{E})$, où p_X et p_Y sont les projections de $X \times Y$ sur X et Y, et où toutes les opérations sont au sens des catégories dérivées.

Question ouverte: tous les foncteurs proviennent-ils effectivement d'un noyau ? Pour le moment, on sait que c'est vrai si X ou Y est réduit à un point (Bondal-Kapranov) ; c'est vrai aussi pour les équivalences de catégories dérivées.

Composition de deux foncteurs à noyau:
$\mathcal{F} \in \mathrm{Ob}(D(X \times Y))$, $\mathcal{G} \in \mathrm{Ob}(D(Y \times Z))$, alors $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} = p_{XZ*}(p_{XY}^* \mathcal{F} \otimes p_{YZ}^* \mathcal{G})$, où les projections vont de $X \times Y \times Z$ sur ses sous-facteurs.

Le foncteur identité a pour noyau $\mathcal{O}_{\mathrm{diag}} = i_* \mathcal{O}_X$ où $i : X \to X \times X$ est le plongement diagonal.

Théorème 2. *(Beilinson): $D(\mathbb{P}^n)$ est engendré par $\mathcal{O}(0), \ldots, \mathcal{O}(n)$.*

Preuve : On va construire une résolution de $\mathcal{O}_{\mathrm{diag}}$. Soit V de dimension $n+1$ tel que $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$ (droites de V). On définit un fibré vectoriel τ sur $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ comme suit:
la fibre de τ en $(L_1, L_2) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ est $\tau_{|(L_1,L_2)} = L_2^* \otimes V/L_1$.
On a $\tau_{|\mathrm{diag}} = T_{\mathbb{P}^n}$ (espace tangent).
De plus τ vient avec une section canonique s définie par les applications naturelles $L_2 \hookrightarrow V \twoheadrightarrow V/L_1$, et qui s'annule sur la diagonale. On a alors une résolution de $\mathcal{O}_{\mathrm{diag}}$ donnée par le complexe de Koszul suivant:

$$\bigwedge^n \tau^* \xrightarrow{s} \bigwedge^{n-1} \tau^* \to \cdots \to \tau^* \xrightarrow{s} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n}$$

avec $\bigwedge^k \tau^* = \bigwedge^k T^*_{\mathbb{P}^n}(k) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-k)$.
On définit $D^{(k)} \in \mathrm{Ob}(D(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n))$ comme suit:

$$D^{(k)} : \quad 0 \to \bigwedge^k T^*(k) \boxtimes \mathcal{O}(-k) \to \cdots \to \mathcal{O} \to 0$$

Et on a alors le triangle exact suivant: [15]

$$0 \to D^{(k)} \to D^{(k+1)} \to . \boxtimes \mathcal{O}(-k)[k] \to 0.$$

Et à tout $\mathcal{E} \in \mathrm{Ob}(\mathbb{P}^n)$ on associe une suite d'objets $\mathcal{E}^{(k)}$ obtenus en appliquant à $\mathcal{E}$ le foncteur de noyau $D^{(k)}$. On a alors un triangle exact

$$\mathcal{E}^{(k)} \to \mathcal{E}^{(k+1)} \to (\text{esp.vect.grad.}) \boxtimes \mathcal{O}(-k).$$

Cela achève la preuve. (?)

Un calcul direct donne

$$H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(j)) = \begin{cases} 0 & \text{si } i > 0 \text{ [et peut-être } j \geqslant -n \text{ ?]} \\ 0 & \text{si } i = 0, j < 0 \\ S^j(V^*) & \text{si } i = 0, j \geqslant 0 \end{cases}$$

D'où pour $0 \leqslant i, j \leqslant n$: $\mathrm{Hom}_{D(\mathbb{P}^n)}(\mathcal{O}(i), \mathcal{O}(j)[k]) = 0$ si $i > j$ ou si $k \neq 0$.

[15] Il semblerait qu'il faille remplacer $D^{(k)}$ par $D^{(k)} \otimes (\mathcal{O}(-n) \boxtimes \mathcal{O}(n))$.

$A = \mathrm{Hom}(\bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}(i), \bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}(i))$ est l'algèbre des chemins d'un carquois orienté à $n+1$ sommets avec des relations.

Dans $D(A^{opp})$ on a $n+1$ modules projectifs, avec les mêmes groupes Ext qu'entre les $\mathcal{O}(i)$ dans $D(\mathbb{P}^n)$, et tous les produits d'ordre supérieur dans le modèle minimal sont nuls. On en conclut que ces catégories triangulées sont équivalentes.

Définition 24. *Une collection exceptionnelle d'objets dans une catégorie triangulée $\mathcal{C}$ est la donnée de $\mathcal{E}_i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $i = 0 \dots n$ vérifiant:*
$\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_j[r]) = 0$ *si $i > j$ ou si $r \neq 0$ et*
$\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_i) = k.\mathrm{Id}$.

EXEMPLE : $\mathcal{O}(i), \mathcal{O}(i+1), \dots, \mathcal{O}(i+n)$ dans $D(\mathbb{P}^n)$
EXEMPLE : un carquois orienté avec relations, de sommets $\{0, \dots, n\}$, avec des flèches $i \to j$ pour $j > i$, et des modules projectifs $P_0, \dots, P_n$

Gorodintsev, Rudakov : le groupe de tresses B_{n+1} agit sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de collections exceptionnelles.

On rappelle que B_{n+1} est le groupe engendré par les éléments $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ avec les relations
$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ si $|i-j| > 1$ et
$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$.

Note culturelle:
Drezet et Le Potier ont classifié les fibrés vectoriels simples rigides $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{CP}^2$ avec $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = \mathbb{C}$ et $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{E}[1]) = 0$. Les rangs sont 1,2,5,13,29,..., ils apparaissent comme composants des solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$.

L'action de B_{n+1} est définie comme suit:
l'image par σ_{i-1} d'une collection exceptionnelle $(\dots, \mathcal{E}_{i-2}, \mathcal{E}_{i-1}, \mathcal{E}_i, \mathcal{E}_{i+1}, \dots)$ est la collection $(\dots, \mathcal{E}_{i-2}, \widetilde{\mathcal{E}}_i, \mathcal{E}_{i-1}, \mathcal{E}_{i+1}, \dots)$ où $\widetilde{\mathcal{E}}_i$ est défini comme rendant exact le triangle

$$\widetilde{\mathcal{E}}_i \to \bigoplus_k \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_{i-1}[k], \mathcal{E}_i) \otimes \mathcal{E}_{i-1}[k] \to \mathcal{E}_i.$$

Analogie avec la théorie des singularités:

$$\mathbb{Z}^{n+1} \twoheadrightarrow K_0(\text{sous-cat. pleine de } \mathcal{C} \text{ eng. par les } \mathcal{E}_i).$$

On a une forme bilinéaire sur K_0: $< [\mathcal{E}], [\mathcal{F}] >= \sum (-1)^k \mathrm{rgHom}(\mathcal{E}, \mathcal{F}[k])$ qui n'est en général ni symétrique ni antisymétrique, mais qui est non dégénérée car $< [\mathcal{E}_i], [\mathcal{E}_j] >$ vaut 0 si $i > j$ et 1 si $i = j$. En identifiant K_0 et $\mathbb{Z}^{n+1}$, se donner une collection exceptionnelle revient à se donner une base de $\mathbb{Z}^{n+1}$ dans laquelle la matrice de $< .,. >$ est triangulaire inférieure. L'action du groupe de tresses sur une telle base est donnée par une formule analogue, avec $\widetilde{e_i} =< e_{i-1}, e_i > e_{i-1} - e_i >$.

Schéma général (Bondal, Kapranov):[16]
Soit $\mathcal{C}_i$ la sous-catégorie triangulée pleine engendrée par $\mathcal{E}_i$. Soit $c_i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_i)$, $c_j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_j)$. Alors $\sum (-1)^k \mathrm{rg}\ \mathrm{Hom}(c_i, c_j[k]) < \infty$ et $\mathrm{Hom}(c_i, c_j) = 0$ si $i > j$. On dit que $\mathcal{C}_0, \dots, \mathcal{C}_n$ forme une famille semi-orthogonale de sous-catégories triangulées pleines.

$\mathcal{C}_i$ est une catégorie saturée, ce qui signifie que tout foncteur $\mathcal{C}_i \to D(.)$ ou $\mathcal{C}_i^{opp} \to D(.)$ est représentable.

[16] Suite à revoir

Soit $\mathcal{E} \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}_i$. $\mathrm{Hom}(.,\mathcal{E}_i)$ définit un foncteur $\mathcal{C}_{i-1} \to D(\text{point})$ représentable par un objet $F(\mathcal{E}) \in \mathcal{C}_{i-1}$, avec $\forall c_i \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}_i$, $\mathrm{Hom}(c_i,\mathcal{E}_i) = \mathrm{Hom}(c_i, F(\mathcal{E}))$.
L'action de B_{n+1} est donnée par σ_{i-1} envoie $\ldots,\mathcal{C}_{i-1},\mathcal{C}_i,\ldots$ sur $\ldots,\widetilde{\mathcal{C}}_i,\mathcal{C}_{i-1},\ldots$
Prendre pour c_i: $F(\mathcal{E})$: $\mathrm{id}_{F(\mathcal{E})} \in \mathrm{Hom}(F(\mathcal{E}),F(\mathcal{E}))$ donne $F(\mathcal{E}) \to \mathcal{E}$, et alors $\widetilde{\mathcal{E}} = \mathrm{Cone}(F(\mathcal{E}) \to \mathcal{E})$, avec $\mathrm{Hom}(c_i,\widetilde{\mathcal{E}}) = 0$.

Exemples de décomposition semi-orthogonale de $D(X)$:

1 $D(\mathbb{P}^n)$ est construit à partir de $n+1$ copies de $D(\text{point})$.

2 $E \to X$ fibré vectoriel de rang $n+1$ sur une variété projective lisse X, $\mathbb{P}(E) \to X$ fibré projectif associé. On a alors le théorème suivant, dû à Orlov : $D(\mathbb{P}(E)$ est engendré par $n+1$ copies de $D(X)$: $p^*(D(X)) \otimes (\mathcal{O}(0),\ldots,\mathcal{O}(n))$.

3 $X \supset Y$ sous-variété de codimension $n+1$, $\widetilde{X}$ l'éclaté de X en Y. Alors $D(\widetilde{X})$ est construit à partir de $D(X)$ et de n copies de $D(Y)$.

Notons $\mathcal{C}_{\leqslant i}$ la sous-catégorie triangulée pleine engendrée par $\mathcal{C}_0,\ldots,\mathcal{C}_i$, de telle sorte qu'on ait une filtration $\mathcal{C}_{\leqslant 0} \subset \mathcal{C}_{\leqslant 1} \subset \ldots$. On peut alors retrouver les $\mathcal{C}_i$ comme suit: $\mathrm{Ob}\mathcal{C}_i = \{\mathcal{E} \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}_{\leqslant i} \mid \mathrm{Hom}(\mathcal{E},\mathcal{C}_{i-1}) = 0\}$.

$\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ catégorie saturée. $\mathcal{B}$ est semi-orthogonale à $\mathcal{A}$ si $\mathrm{Hom}(\mathcal{B},\mathcal{A}) = 0$. Ceci est décrit par un foncteur $F : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, $\mathrm{Hom}(a,b) = \mathrm{Hom}(a,F(b))$, et tout objet de $\mathcal{C}$ est isomorphe au cone d'une flèche $f : a \to b$.
Classifier les extensions de $\mathcal{A}$ par $\mathcal{B}$ équivaut à classifier les foncteurs de $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$, ou encore à classifier les objets de $\mathrm{Fonct}(\mathcal{B},\mathcal{A})$.

Au moins dans la terminologie A_∞:

Définition 25. *un $A_\infty-$carquois ordonné est une $A_\infty-$catégorie $\mathcal{C}$, d'objets $\{0,\ldots,n\}$, avec:*
$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(i,j) = 0$ *si $i > j$*
$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(i,i) = k.\mathrm{id}$ *en degré i*
$\mathrm{rg}(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(i,j)) < \infty$ *pour $i < j$.*

Et on a une action du groupe de tresses sur les classes d'équivalence de $A_\infty-$carquois ordonnés.

10.. Cours du 25 mars

La dernière fois, on a considéré, pour X variété projective lisse, la dérivée de la catégorie des faisceaux cohérents sur X, notée $D(X)$, qui est saturée.
La thème de cette fois-ci est le foncteur de Serre (construit par Kapranov!)
Soit $\mathcal{C}$ une catégorie triangulée saturée. On a une auto-équivalence de catégories $S : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ tel que $Hom(\mathcal{E}, \mathcal{F})^*$ (dual d'un espace vectoriel de dimension finie) soit fonctoriellement isomorphe à $Hom(\mathcal{F}, S(\mathcal{E}))$. En fait, on montre que $\mathcal{F} \mapsto Hom(\mathcal{E}, \mathcal{F})^*$ est représentable, et on note $S(\mathcal{E})$ l'objet qui le représente. En d'autres termes,

$$\mathcal{C} \sim^{(1)} Fun(\mathcal{C}^{opp}, D(.)) \sim^{(2)} Fun(\mathcal{C}^{opp}, D(.)^{opp}) \sim^{(3)} Fun(\mathcal{C}, D(.))^{opp} \sim (\mathcal{C}^{opp})^{opp}$$

pour $\mathcal{C} = D(X)$. (1) vient du fait que $\mathcal{C}$ est saturée, (2) de ce que $D(.)$ est autoduale.
La dualité de Serre classique dit

$$H^i(X, \mathcal{E})^* = H^{n-i}(X, \mathcal{E}^* \otimes K_X)$$

où $n = dimX$ et $K_X = \Lambda^n T^*_X$.
On a alors

$$\begin{array}{rcccl} Hom(\mathcal{E}, \mathcal{F})^* & \simeq & (\mathbb{H}^0(X, \mathcal{E}^* \otimes F))^* & \simeq & \mathbb{H}^n(X, \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}^* \otimes K_X) \\ & \simeq & \mathbb{H}^0(X, \mathcal{F}^* \otimes \mathcal{E} \otimes K_X[n]) & = & Hom(\mathcal{F}, \mathcal{E} \otimes K_X[n]) \end{array}$$

où $\mathbb{H}^*$ désigne les groupes d'hypercohomologie On a alors, dans ce cas, $S(\mathcal{E}) = \mathcal{E} \otimes K_X[n]$, i.e. $S = \otimes K_X[n]$, où $n = dimX$.

Théorème 1. *(A. Bonald, D. Orlov) Si X est une variété de Fano (i.e. $-K_X > 0$) ou est de type générique ($K_X > 0$) alors X peut être reconstruit à partir de $D(X)$ et*

$$Aut(D(X)) = \mathbb{Z} \times (Pic(X) \rtimes Aut(X)$$

où le générateur de $\mathbb{Z}$ est le foncteur de décalage, et où un fibré en droites $\mathcal{L}$ du groupe de Picard est identifié au foncteur $\mathcal{L}\otimes$.

Si X est une hypersurface de degré d de $\mathbb{P}^{n+1}$, alors pour $d < n+2$, X est une variété de Fano, pour $d > n+2$ elle est de type générique.

Définition 26. *X est dite varitété de Calabi-Yau si $K_X = o \in Pic(X)$.*

Définition 27. *Une catégorie saturée $\mathcal{C}$ est dite de Calabi-Yau de dimension n si le foncteur de Serre S est isomorphe* [17] *à $[n]$.*

Si X est une variété de Calabi Yau, $D(X)$ est de Calabi-Yau. Moralement, $S \in Ob(Fun(D(X), D(X)))$ et $S[-n] = \otimes K_X$ On peut construire une slgèbre graduée

$$A_m = Hom_{Fun(D(X),D(X))}(Id, (S[-n])^m)$$

Il est facile de voir qu'alors $A_m = H^0(X, K_X^m)$ [18]
Remark
En général, si $\mathcal{C}$ est une catégorie dans laquelle on a une auto-équivalence F, pour $m \in \mathbb{Z}$ on peut construire $\Gamma_m = Hom_{Fun(\mathcal{C},\mathcal{C})}(Id, F^m)$, et une application $\Gamma_n \times \Gamma_m \to \Gamma_{m+n}$ grâce à l'isomorphisme $Hom(F^n, F^{n+m}) \simeq Hom(Id, F^m)$ que l'on obtient en composant à droite par F^n. $\bigcup_b \Gamma_n$ est ainsi muni d'une structure de monoï de avec une application degré $\Gamma \to \mathbb{Z}$ qui à $x \in \Gamma_n$ associe n. Il se trouve qye ce monoïde est alors quasiment commutatif. Plus précisément, pour $T \in Aut(\Gamma)$ la conjugaison par F, on a $deg(T(a)) = deg\ a$, et, uniquement à cause de l'inversibilité de F, la formule

$$a.b = b.T^{deg(b)}(a)$$

[17] "$\sim$"

[18] à détailler?

Il s'ensuit que Γ_0 est dans le centre du monoïde, de même que $\Gamma_1.\Gamma_1$, et, plus génŕalement,

$$\Gamma_m.\Gamma_m \subset Z(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \Gamma_{mk})$$

Voyons maintenant le rapport avec les faisceaux cohérents : par Soit A un carquois orienté avec relations (en fait, on n'est pas obligé de supposer qu'il est fini), on note $D(A) = D^b(A-mod)$, catégorie dérivée des A-modules de dimension finie. Le foncteur de Nakayama $D(A) \to D(A)$, défini comme composé du foncteur $M \mapsto \underline{Hom}(M, A)$ de $D(A)$ vers $D(A^{opp})$, et du foncteur $M \mapsto Hom_{Vect(k)}(M, k)$ de $D(A^{opp})$ vers $D(A)$, est défini par des foncteurs de reflexion. Se rappeler la derniè e fois : $D(\bullet \to \bullet)$ admet une suite d'objets indecomposables

$$\mathcal{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{E}[1] \to \mathcal{F}[1] \to \mathcal{G}[1]$$

où les flèches sont bien définies par S puisque $Hom(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = k$, etc. On a $S^3 = [1]$.

<u>Foncteurs adjoints</u>

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux catégories saturées. Tout $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ a un adjoint à droite et un adjoint à gauche,

$$\check{}\mathcal{F} : \mathcal{B} \to \mathcal{A} \quad \mathcal{F}\check{}\,\mathcal{B} \to \mathcal{A}$$
$$Hom(\mathcal{F}(a), b) = Hom(a, \mathcal{F}\check{}(b))$$
$$Hom(b, \mathcal{F}(a)) = Hom(\check{}\mathcal{F}(b), a)$$

les isomorphismes étant de plus fonctoriels. On de façon évidente $\check{}(F\check{}) = F = (\check{}F)\check{}$. La question qui se pose est : à quoi correspond $(F\check{})\check{}$?
Exemple : $\mathcal{A} = D(X)$, $\mathcal{B} = D(Y)$,

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & X \times Y \arrow[dl, "p_X"'] \arrow[dr, "p_Y"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

Supposons que F est donné par son noyau $\mathcal{E} \in D(X \times Y)$. Alors

$$\begin{array}{rcl} Hom(b, F(a)) & = & \mathbb{H}^0(Y, b^* \otimes (p_Y)_*(p_X^* a \otimes \mathcal{E})) \\ & = & \mathbb{H}^0(X \times Y, (p_Y)^* b * \otimes p_X^* a \otimes \mathcal{E}) \\ & = & \mathbb{H}^0(X, a \otimes (p_X)_*(p_Y^* b^* \otimes \mathcal{E})) \end{array}$$

d'où $\check{}F(b) = ((p_X)_*(p_Y^* b \otimes \mathcal{E}))^* = (p_X)_*((p_Y^* b \otimes \mathcal{E})^* \otimes p_Y^* K_Y[dim_Y])$, et, comme $(p_Y^* b \otimes \mathcal{E})^* \simeq p_Y^* b^* \otimes \mathcal{E}$, $\check{}F$ est donné par le noyau $\mathcal{E} \otimes p_Y^* K_Y[dim_Y]$.
$\check{}(\check{}F)$ est alors donné par le noyau

$$\mathcal{E} \otimes p_Y^* K_Y^*[-dim_Y] \otimes p_X^* K_X[dim_X]$$

d'où $\check{}(\check{}F) = S_B^{-1} o F o S_A$.
Ce résultat est curieux parce que la définition n'utilise pas la dualité des espaces vectoriels de dimensions finies, contrairement à la dualité de Serre.

Exercice 2. *Prouver* $\check{}(\check{}F) = S_B^{-1} o F o S_A$ *dans le contexte des catégories saturées.*

On obtient un critère simple pour que le foncteur $D(X) \to D(Y)$ défini par $\mathcal{E} \in D(X \times Y)$ soit inversible. S'il l'est, cela veut dire que $F^{-1} = \check{}F = F\check{}$, donc on a juste à vérifier que $Fo\check{}F = id$ et $\check{}FoF = id$ (on n'a pas à chercher le candidat inverse). Cela veut dire vérifier

$$\mathcal{E} \otimes p_Y^* K_Y^*[-dim_Y] \otimes p_X^* K_X[dim_X] = \mathcal{E}$$

ce qui implique $dim_X = dim_Y$, donc également

$$\mathcal{E} \otimes p_X^* K_Y^* \otimes p_X^* K_X = \mathcal{E}$$

Un résultat de Macciocca dit que le support de $\mathcal{E}$ est $X \times Y$. On montre que $K_Y^* \otimes K_X$ est de torsion dans $Pic(X \times Y)$, c'est à dire que $K_X \in Pic(X)_{tors}$, $K_Y \in Pic(Y)_{tors}$.

Définition 28. *$\mathcal{C}$ saturée est de Calabi-Yau de dimension n si $S \sim [n]$, et de Calabi-Yau fractionnaire de dimension N/m si pour $m \neq 0$ on a $S^m \sim [N]$.*

Les carquois ne donne jamais de catégories de Calabi-Yau, mais parfois des catégories de Calabi-Yau fractionnaires.

Exemple

Soit E une courbe elliptique sur $\mathbb{C}$, $\Gamma \subset Aut(E)$ un groupe fini. $E/Gamma$ est alors un orbifold (complexe Γ-équivariant de faisceaux cohérents sur E). Supposons qu'en tant que courbe E/Γ soit $\mathbb{CP}^1$, et soit (d_i) la collection des ordres des points de l'orbifold ($d_i > 1, i = 1 \dots k$). Localement, on se trouve dans $\mathbb{C}$ quotienté par un groupe cyclique jamais nul, cas dans lequel on a des $z \mapsto z\xi$, avec $\xi^{d_i} = 1$. On a de plus

$$\sum (1 - \frac{1}{d_i}) = 2$$

donc un nombre fini de cas : la collection (d_i) appartient a la liste

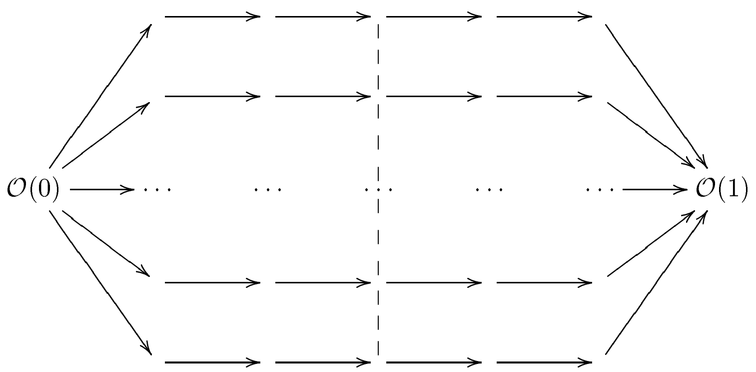
$$(2,2,2,2) \quad (2,3,6) \quad (3,3,3) \quad (2,4,4)$$

$D(E/\Gamma)$ est engendré par une collecion exceptionnelle. On a une une flèche $\Gamma \to \mathbb{C}^*$ fournie par l'action sur $\mathbb{H}^*(E, K_E)$.

Etude locale au voisinage d'un point de l'orbifold

Localement, on a $\mathbb{C}[z] \rtimes \mathbb{C}[\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}]$ où un générateur de $\mathbb{C}[\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}]$ est donné par T tel que $T^d = 1$, et où la relation définissant le produit semi-direct est $TzT^{-1} = e^{\frac{2i\pi}{d}} z$. $P_k = z^k\mathbb{C}[z] \subset \mathbb{C}[z]$, pour $k = 0, 1, \dots, d-1$.

Exercice 3. *P_k est un module projectif sur A, i.e. $P_k = Ap_k$ où $p_k \in A$, $p_k^2 = p_k$. $P_0/P_1, P_1/P_2, \dots, P_{d-2}/P_{d-1}$ forme une collection exceptionnelle*



[19].

Cas des variétés de Calabi-Yau

On sait d'après Mukai que $D(X)$ a un groupe d'automorphismes particulièrement large, et qu' un grand nombre de variétés de Calabi-Yau distinctes ont des catégories dérivées équivalentes.

Transfomation de Fourier-Mukai

Soit A une variété abélienne sur $\mathbb{C}$, $A = \mathbb{C}^n/\Gamma$, avec $\Gamma \simeq \mathbb{Z}^{2n}$. $A\check{} = Pic(A)_0$, $A\check{} = (\mathbb{C}^n)\check{}/\Gamma\check{}$. Soit $\mathcal{L}$ le fibré en droite universel de $A \times A\check{}$. $\mathcal{L}_{|A\times\{0\}\cup\{0\}\times A\check{}}$ est trivialisé.

Théorème 2. *$\mathcal{L}$ induit une équivalence $D(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{A}\check{})$.*

[19] A quoi correspond ce diagramme?

On sait que son foncteur inverse est alors $\mathcal{L}^*[n]$, soit $(p_A)_*(\mathcal{L})$. Un calcul que l'on peut faire à partir de fonctions thêtas montre que c'est en fait $\mathcal{O}_{\{0\}}[n]$
Cas de $n = dimA = 1$ ($\Leftrightarrow A$ est une courbe elliptique)
On a dans ce cas $A\check{} \simeq A$, et FM, transformation de Fourier-Mukai, est telle que $FM^2 = \mathcal{F}[1]$, où $\mathcal{F}$ correspond à l'auto-équivalence de $D(A)$ $x \mapsto -x$. Dans le cas des courbes elliptiques, on a une autre auto-équivalence, $\otimes J_{\{0\}}$, où $J_{\{0\}}$ est le faisceau d'idéaux de $\{0\} \in A(k)$. Alors, $((\otimes J_{\{0\}})oFM)^3$ est le foncteur de décalage, et on a la suite exacte

$$1 \to \mathbb{Z} \to G \to SL(2, \mathbb{Z}) \to 1$$

où $\mathbb{Z}$ est engendré par le décalage, et G est le groupe des auto-équivalences engendré par le foncteur décalage, $\otimes J_{\{0\}}$, et la transformation de Fourier-Mukai.
Il y a trois types de variétés de Calabi-Yau : les variétés abéliennes, les variétés hyperkähleriennes, et les variétés de Calabi-Yau proprement dites. Les variétés kähleriennes sont des surfaces $K3$ telle que $rhH^{2,0} > 0$, les variétés de Calabi-Yau proprement dites sont celles qui vérifient $H^{i,0} = 0$ pour $0 < i < dimX$. Dans ce dernier cas, il y a une auto-équivalence dont le noyau est $J_{diag(X)}$

Conjecture 1. *(issue de la symétrie miroir)*
Soient X et Y deux variétés de Calabi-Yau de familles duales $\mathcal{M}od_X$ et $\mathcal{M}od_Y$, espaces de modules de variétés algébriques complexes inclues dans $\mathbb{P}^n$. On a un fibré

$$\begin{array}{c} \widetilde{\mathcal{M}od_Y} \\ \mathbb{C}^* \Big\downarrow \\ \mathcal{M}od_Y \end{array}$$

où $\widetilde{\mathcal{M}od_Y}$ est le module des paires (Y, S_Y), avec S_Y une trivialisation de K_Y^2, c'est-à-dire que $S_Y \sim [2dimY]$ par transformation naturelle. La conjecture est qu'on a une suite exacte

$$1 \to \mathbb{Z} = \pi_1(\mathbb{C}^*) \to \pi_1(\widetilde{\mathcal{M}od_Y}) \to \pi_1(\mathcal{M}od_Y)$$

où $1 \in \mathbb{Z}$ est le foncteur de décalage, et $\pi_1(\widetilde{\mathcal{M}od_Y})$ agit par automorphismes sur $D(X)$.

11.. Cours du 1er Avril : la catégorie de Fukaya

11.A.. **Résultat.** Soit X une variété symplectique compacte et $\mathcal{C}^\infty$, de dimension $2n$. Notons ω sa forme symplectique. Considérons de plus un fibré $\mathscr{L} \xrightarrow{\pi} X$ tel que la fibre au dessus de x soit l'ensemble des sous-espaces lagrangiens orientés de T_xX. Si $n > 0$, le groupe fondamental de chaque fibre est $\mathbb{Z}$.

Choisissons un $\mathbb{Z}$ revêtement $\widetilde{\mathscr{L}} \to \mathscr{L}$ qui soit un revêtement universel de chaque fibre. Nous supposerons que la classe de ω dans $H^2(X,\mathbb{R})$ est suffisament grande[20].

La $\mathcal{A}_\infty$-catégorie $\mathcal{F}(X)$ est alors de type fini.

11.B.. **Exemple principal.** Ici, X est une variété kählerienne et $K_X = 0 \in \mathrm{Pic}(X)$. Soit $\Omega \in \Gamma(X, K_X)$ un élément de volume holomorphe non nul.

Soit $\widetilde{\mathscr{L}}$ l'ensemble des $(x.L_x, \arg)$ où L_x est un sous-espace lagrangien orienté de T_xX et tels que $e^{-i\arg}\Omega_{|L_x}$ soit un élément de volume **réel** et positif.

Les objets de la catégorie sont les sous-variétés lagrangiennes orientées de X, munies d'un relèvement :

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r] \arrow[dr, dotted] & \mathscr{L} \arrow[d] \\ & \widetilde{\mathscr{L}} \end{tikzcd}$$

(ceci implique que L a une structure spin)

Morphismes Nous nous restreignons au cas où L_1 et L_2 sont transversaux l'un à l'autre. On pose $\underline{\mathrm{Hom}}\,(L_1, L_2) = \mathbb{R}^{L_1\cap L_2}$ (en tant qu'espace vectoriel). On le munit d'une $\mathbb{Z}$-graduation :

Soit $x \in L_1 \cap L_2$. On a une forme hermitienne sur T_xX, prenons une base orthonormale $e_1, \dots, e_n$ et notons $z_1, \dots z_n$ les coordonnées associées. Un revêtement de la grande grassmannienne[21] provient de $\Omega \in (\bigwedge^n T_xX)^*$ tel que $\Omega \in \mathbb{R}_{>0} dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$. T_xL_1 est alors muni de la base orientée $e^{i\mathrm{Arg}^{(1)}} e_1, \dots, e^{i\mathrm{Arg}^{(1)}} e_n$. T_xX est la somme directe de n copies de $\mathbb{C}$.

$$\sum_{j=1}^n \mathrm{Arg}\,_j^{(i)} = \arg^{(i)}, \text{ pour } i = 1, 2$$

Degré d'un vecteur de base dans $\underline{\mathrm{Hom}}\,(L_1, L_2)$:

$$\mu_x(L_1, L_2) = \sum_{j=1}^n (1 + \frac{\mathrm{Arg}\,_j^{(2)} - \mathrm{Arg}\,_j^{(1)}}{\pi})$$

On a $\mu_x(L_1, L_2) + \mu_x(L_2, L_1) = n$.

11.C.. **Compositions.** Soient $L_1, \dots, L_k$ en position générale.

$$m_k : \underline{\mathrm{Hom}}\,(L_0, L_1) \otimes \dots \otimes \underline{\mathrm{Hom}}\,(L_{k-1}, L_k) \to \underline{\mathrm{Hom}}\,(L_0, L_k)[2-k]$$

Soient $x_0 \in L_0 \cap L_1, \dots x_k \in L_{k-1} \cap L_k$ et $y \in L_0 \cap L_k$. On suppose donnés partout des vecteurs de base. [22]. Le coefficient de y dans $m_k(x_1 \otimes \dots \otimes x_k)$ est "égal" à une somme.

On choisit, une fois pour toutes, une structure quasi-complexe sur X compatible avec ω. La somme est sur toutes les applications $D^2 \to X$, D^2 étant le disque unité fermé dans $\mathbb{C}$.

[20] ?

[21] ???

[22] probablement comme + haut

$\phi : D^2 \to X$ est une application holomorphe. Choisissons des points $p_1, \dots, p_n, q$, dans l'ordre cyclique sur le cercle tels que $\phi(p_i) = x_i$ et $\phi(q) = y; \phi([q,p]) \subset L_0, \phi([p_1, p_2]) \subset L_1, \dots$.

Revenons sur la somme plus haut. C'est finalement :

$$\sum_{\{f:D^2 \to X\}/PSL(2,\mathbb{R})} \pm \exp(-\int_{D^2} f^*\omega)$$

L'espace de fonctions sur lequel on intègre a une orientation naturelle, d'où la présence du signe. Nous manquons dínformations sur la convergenece de cette intégrale.

Conjecture .. *L'exponentielle est convergente si* $[\omega]$ *est suffisament grande*

Le problème peut être contourné en introduisant un paramètre formel t ($\exp(-t \int_{D^2} f^*\omega)$ et en changeant de corps de base[23]

Comment prouver les associativités supérieures ?

$$\sum_{\substack{k,l \geqslant 2 \\ k+l=N}} \pm m_k(\dots, m_l(\dots), \dots) = 0$$

Nous choisissons à nouveau des points comme plus haut, et nous avons à prouver que le coefficient de chaque élément de la base est 0 dans l'ensemble d'arrivée.

L'ensemble des applications du disque dans le blob, modulo $PSL(2,\mathbb{R})$ est une variété de dimension 1. Elle peut être compactifiée : le bord est l'ensemble des applications de FIGURE dans X. L'aire de $f \to \int_{D^2} f^*\omega$ est locallement constante. Une obstruction à cela serait qu'il n'y ait aucun point parmi $p_1, \dots, p_k$ dans le premier disque :

FIGURE "arising from individual lagrangian manifold"

En fait, cela se comporte comme si il y avait un m_0. On peut rajouter à la définition des $\mathcal{A}_\infty$-catégories un $m_0 \in \underline{\mathrm{Hom}}^2(\mathcal{E}, \mathcal{E})$, $\mathcal{E}$ étant un objet de la catégorie. Cela implique que l'on n'a plus $m_1^2 = 0$.

Exemple typique

Soit une algèbre A et M un A-module libre $\mathbb{Z}$-gradué muni d'une collection d'applications $d_i : M^i \to M^{i+1}$, telle que $d^2 \neq 0$. On peut prendre alors : $m_0 = d^2, m_1 = [d, .]$ et les compositions habituelles pour les m_i suivants.

Problème : tuer m_0

Le m_0 provient de disques holomorphes d'aire non nulle, $f : D^2 \to X$ telle que $f(\partial D^2) \subset L$

- De tels disques n'existent pas dans la version de la catégorie de Fukaya associée aux singularités isolées des fonctions holomorphes.
- si $H^2(L, \mathbb{R}) = 0$, nous pouvons modifier les associativités d'ordre supérieur de façon à ce que ça marche ! (travail commun avec Fukaya, Oh, Ohto, Ono)[24]

Considérons maintenant des disques d'aire positive minimale : $f(\partial D^2) \subset L$. $\cup f(\partial D^2)$ est une sous-variété orientée de dimension $n-2$ de L.

Nous pouvons redéfinir par récurrence les produits d'ordre supérieur. On choisit une sous-variété de dimension $n-1$ de L et $\partial(n-1) = \cup f(\partial(D^2))$ [25]

2) On X, il existe une involution antisymplectique $\sigma, \sigma^*\omega = -\omega$, telle que $\sigma_{|L} = \mathrm{Id}$.

FIGURE faire très attention à l'orientation +1-1=0 ; $s = [n]$ dans $F(X)$. Si $L1 \to L2$ est une isotopie hamiltonienne, ils fournissent deux objets équivalents de la catégorie

[23] $k((t))$ je suppose...
[24] Préciser les noms
[25] ∂(variété de dim n-1) ?

11.D.. **Symétrie miroir.** On note s le décalage de n dans $\mathcal{F}(X)$. Variété symplectique donne variété algébrique projective et lisse Y sur $\mathbb{R}$ avec $K_Y = 0$ si $C_1(T_x) = 0$ (classe de Chern) ($\leftrightarrow$ il existe un revêtement $\tilde{I} \to I$. $\mathcal{F}(X)$ est une sous catégorie pleine de $\mathcal{D}(Y)$.

Exemples $X = (S^1)^2, K = \int_X w > 0$ donne une courbe elliptique $E(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*/(e^t)^{\mathbb{Z}}$. On a $E(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*/(e^t)^{\mathbb{Z}}$. Les lagrangiens sont des lacets sur le tore. On peut agrandir la Catégorie de Fukaya : (L est un système local à monodromie unitaire) FIGURE $m_1 = 0; m_2 : \underline{\mathrm{Hom}}(L_0, L_1) \times \underline{\mathrm{Hom}}(L_1, L_2) \to \underline{\mathrm{Hom}}(L_0, L_2)$ Revêtement universel FIGURE Les triangles sont en progression arithmétique. $\sum_{x \in a\mathbb{Z}+b} e^{-\mathrm{Arg} \pm x^2}$[26] Il existe une extension naturelle de $\mathcal{F}(X) \simeq D(Y)$.

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathscr{L}} \arrow[r, "2\mathbb{Z}"'] & \mathscr{L} \arrow[d, "\text{sous-espaces lagrangiens orientés}"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Posons $\widetilde{\mathrm{Sympl}}(X, \widetilde{\mathscr{L}})$ le groupe des automorphismes de X munis (?) d'un relèvement à $\widetilde{\mathscr{L}}$. On a :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\text{décalages}"'] & \widetilde{\mathrm{Sympl}}(X, \widetilde{\mathscr{L}}) \arrow[r] \arrow[d, "\text{L'action de } (X,\omega) \text{ est remontée à } \widetilde{\mathscr{L}}"] & \mathrm{Sympl}(X, \omega)/\text{hamiltonian isotopic to id} \\ 1 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathrm{Aut}(\mathcal{F}(X)) = \mathrm{Aut}(D(Y)) & \end{tikzcd}$$

si $H^1(X, \mathbb{R}) = 0$

Supposons que nous avons une famille de variétés complexes CY projectives et lisses. $X \sim p^{-1}(m_0)$ avec la forme de Kähler en tant que forme symplectique ($m \in l_0$).

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{X} \arrow[d, "p_1"] \\ \widetilde{M} \arrow[r, "\mathbb{C}^*"'] & M \ni m_0 \end{tikzcd}$$

Fibre au-dessus de m : $H^0(\pi^{-1}(m), K^2) \backslash \{0\}$

$\pi_1(M, m_0) \to \pi_0(\mathrm{Sympl}(X))$

$1 \to \mathbb{Z} \to \pi_1(M^2) \to \pi_1(M)$. Attention : les variétés sont complexes, mais $D(Y)$ est la catégorie dérivée de la catégorie des variétés réelles.

Soit (ou on a) un morphisme gradué $\mathrm{Sympl}(X) \to \mathrm{Aut}(H^\bullet(X, \mathbb{Z}))$ et $\mathrm{Aut}(D(Y)) \to \mathrm{Aut}(H^\bullet(Y(\mathbb{C}), \mathbb{Q}))$ avec la formule : Soit $\mathcal{E} \in \mathrm{Ob}(D(Y \times Y))$ correspondant au foncteur : $\mathcal{F} = (p_2)_*(\mathcal{E} \otimes p_1^* F)$ (p_1 et p_2 désignent les deux projections de $Y \times Y$ sur Y). $\mathrm{ch}(\mathcal{F}) \in H^{\mathrm{even}}(Y(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$. D'après Riemann-Roch, on a $\gamma = \mathrm{ch}(\mathcal{F}) \mapsto (p_2)_*(p_1^*(\gamma) \wedge \mathrm{ch}(\mathcal{E}) \wedge p_1 * T_{\mathrm{odd}}(T_y))$.

Exemple le plus simple : $\mathscr{X} \xrightarrow{p} \mathscr{M}$, où $\mathscr{X}$ est une compactification de l'hyperplan $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ de $\mathbb{C}^n$ et $p((x_1, \ldots, x_n)) = \prod_{i=1}^n x_i$.

$n = d + 2$ et $d = \dim_{\mathbb{C}} p^{-1}(\omega_0)$ ($\mathscr{M} = \mathbb{C}P^1 \backslash \{0, \infty, 1/n^n\}$)

$\Pi_1 \mathscr{M} \to \Pi_0(\mathrm{Sympl(fibre)}) \to \mathrm{Aut}\, H^d(\mathrm{fibre}, \mathbb{Z})$. ($\Pi_1(\mathscr{M})$ est le groupe libre à deux générateurs.

[26] ou $-y + xz$?

C'est la même chose que la monodromie de l'hyper série [27] :

$$\omega \in \mathscr{M}F(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(kh)!}{(k!)^n}\omega^k.$$

Variétés algébriques Y : hypersurfaces dans $\mathbb{R}P^{n-1}$ de degré n. Nous pouvons construire deux automorphismes de la catégorie dérivée :

- $T_0 : \otimes \mathcal{O}(1)$ (espace projectif). Action sur $H^1(Y(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$: $\gamma \mapsto \gamma \wedge \exp(c_1(\mathcal{O}(1)))$
- $T_{\frac{1}{n^n}}$: noyau : $\mathcal{O}_{Y\times Y}^{-1} \to \mathcal{O}_{\mathrm{diag}}$.
  $\gamma \mapsto \gamma - \int \gamma \wedge T_{\mathrm{odd}} \frac{1}{\in H^0} y$.

On peut calculer $\otimes H^{\mathrm{pp}}(Y(\mathbb{C}))$ (partie algébrique).
$\underline{n = 5}$: Dans la base $1, c_1(\mathcal{O}(1)), c_1(\mathcal{O}(1))^2, c_1(\mathcal{O}(1))^3$:

$$T_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1/2 & \ddots & \ddots & 0 \\ 1/6 & 1/2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{1/5^5} = \begin{pmatrix} 1 & -25/6 & 0 & -5 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a : $(T_0 T_{1/5^5})^5 = 1$. Au niveau des foncteurs, ce n'est pas exactement l'identité, mais plutôt un décalage de 4.

Généralisation Soit Y un CY de dimension n.

Définition 29. *Un objet sphérique est un objet $\mathcal{E}$ de $D(Y)$ tel que :*

$$\dim \mathrm{Ext}^i(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = \begin{cases} 1 & \textit{pour } i \in \{0, n\} \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

et si(?) le foncteur $(p_1^*\mathcal{E}^* \otimes p_2^*\mathcal{E}^*) \to \mathcal{O}_{diag}$ est inversible.

Ici, un objet sphérique est une sphère lagrangienne $L \subset X, L \rightsquigarrow S^n$, d'où le "twist de Dehn" $T_{\omega_L} \in \Pi_0(\mathrm{Sympl}(X))$. Les voisinages de L correspondent aux voisinages de la section nulle de T^*S^n.

Soit ϵ une petite constante. Considérons la variété(?) $\{z_0^2 + \cdots + z_n^2 = \epsilon\} \in \mathbb{C}^{n+1}$ avec $\omega = r_{-1} \sum dz_i \wedge d\bar{z}_i$ qui est quasi-quadratique.

Exemples

- Si $\dim Y = 3$ et $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent, on a $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = 0$ pour $i < 0$ et $i > 3$. Si $\mathcal{E}$ est simple et rigide, c'est un objet sphérique.
- Soit $C \subset Y$ une courbe rationnelle $N_C = \mathcal{O}[-1] \oplus \mathcal{O}[-1]$, $\mathcal{O}_L$ est sphérique.

[27] terminologie ?

Symétrie miroir pour les variétés de Fano

On a une dualité qui à X variété lisse projective, $-K_X > 0$, associe Y lisse quasiprojective, $K_Y = 0$, et $f : Y \to \mathbb{A}^1$ propre à fibres de Calabi-Yau.

Remarque : dans les exemples, il existe $\overline{Y}$ lisse projective et $\bar{f} : \overline{Y} \to \mathbb{P}^1$ avec $K_{\overline{Y}} = \bar{f}^*\mathcal{O}(1)$.

Si $X \subset \mathbb{P}^{n-1}$ est une intersection complète de degré $(d_1, \dots, d_k)$, $d_1 + \dots + d_k < n$, Y contient comme ouvert de Zariski

$Y_0 = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_1 \dots z_n = 1,\ z_1 + \dots + z_{d_1} = \mathrm{const}_1,\ z_{d_1+1} + \dots + z_{d_2} = \mathrm{const}_2,\ \dots\}$

muni de l'élément de volume holomorphe

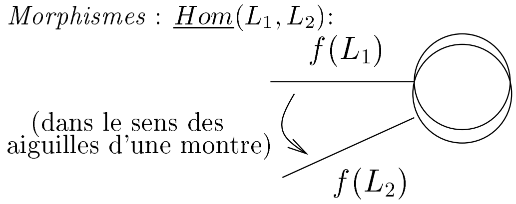
$$\frac{\prod dz_i}{d(\prod zi) d(\sum_1^{d_1} z_i) d(\sum_{d_1+1}^{d_2} z_i) \dots}.$$

On construit une *catégorie de Fukaya* pour $f : Y(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$. où $Y(\mathbb{C})$ est considérée comme une variété symplectique, d'élément de volume holomorphe Ω.

Objets : les sous-variétés lagrangiennes L de $Y(\mathbb{C})$ avec un “relèvement” (i.e. un choix de $\log \frac{\Omega}{|\Omega|}|_L$), qui sont fermées et telles que $f(L)$ est l'union de $\mathbb{R}_{\leqslant 0}$ et d'un compact.

Ainsi $f^{-1}(\mathbb{R}_{\leqslant -c})$ est une hypersurface. On obtient une fibration de dimension 1.

Morphismes : $\underline{Hom}(L_1, L_2)$:



On obtient ainsi une A_∞−catégorie, modulo quelques problèmes avec m_0 comme dans le cas Calabi-Yau.

Variante :

$X \subset \mathbb{C}^n$ boule ouverte contenant 0, avec structure Kählerienne plate. Soit $f_0 : X \to \mathbb{C}$ fonction holomorphe avec un point critique en 0, $f_0(0) = 0$, et $f : X \to \mathbb{C}$ proche de f_0, générique, avec μ points critiques, de Morse, et de valeurs critiques $p_1, \dots, p_\mu \in \mathbb{C}$ distinctes.

On prend des chemins dans $\mathbb{C}$ reliant $-\infty$ aux p_i qui ne se coupent pas. A p_i correspond une sous-variété lagrangienne L_i fermée dans X et transversale à ∂X.

$f(L \cap \text{vois. de } \partial X) \subset]-\infty, -\epsilon[$, on force $\epsilon = \max |p_i|$.

On n'a pas de problème avec m_0 parce qu'il n'existe pas de disque holomorphe à frontière sur L_i. Si $\omega = d\alpha$ est une forme symplectique, $\alpha|_{L_i}$ est fermée, et en fait exacte. $\int_{\text{cercle}} \alpha = 0$ implique que si $\phi : D^2 \to X$, $\phi(\partial D^2) \subset L$, alors $\int_{D^2} \phi^*\omega = 0$ et ϕ est constante (car $\phi^*\omega \geqslant 0$).

$L_1, \dots, L_\mu$ est une collection exceptionnelle
$\mathrm{Hom}(L_i, L_j) = 0$ si $i > j$.
$\mathrm{Hom}(L_i, L_i) = \mathbb{R}.[0]$.
Le groupe de tresses agit sur la collection exceptionnelle de la même façon qu'il agit sur les chemins.

Foncteur de Serre :
$f : X \to \mathbb{A}^1$

$\mathrm{Hom}(L_1, L_2)^* = \mathrm{Hom}(L_2, S(L_1))$ où

Conjecture : X Fano, de dual $f : Y \to \mathbb{A}^1$. On choisit des chemins de $-\infty$ aux valeurs critiques de f, qui ne se coupent pas. Alors la construction précédente donne une décomposition semi-orthogonale de $D(X)$.

Exemple : $X = \mathbb{CP}^n$, les valeurs critiques sont les racines $n+1-$ièmes de l'unité.

En dehors des valeurs critiques, on a un fibré de variétés de Calabi-Yau ($c_1 = 0$), et une application

$$\pi_1(\mathbb{C} - \{\text{val.crit.}\}) \to \pi_0(\text{var.CY sympl.}).$$

Théories cohomologiques pour les $A_\infty-$catégories

Soit $\mathcal{A}$ une $A_\infty-$catégorie, on peut définir :
sa cohomologie de Hochschild $HH^\bullet(\mathcal{A})$, qui est utile par exemple pour l'étude des déformations de $\mathcal{A}$;
son homologie cyclique périodique $HP_\cdot(\mathcal{A})$, un "invariant d'homotopie topologique", qui mène par exemple à une théorie de Hodge.

Si A est une algèbre, $HH^\bullet(A) = H^\bullet(A, A) = \mathrm{Ext}^\bullet_{A-\mathrm{mod}-A}(A, A)$ et pour une catégorie, $HH^\bullet(\mathcal{A}) = \mathcal{E}xt^\bullet_{\mathrm{Fun}(\mathcal{A},\mathcal{A})}(\mathrm{Id}, \mathrm{Id})$.

Explicitement, on peut l'obtenir à partir de la résolution de A par des $A \otimes A^{\mathrm{opp}}-$modules libres suivante : $\cdots \to A \otimes A \otimes A \to A \otimes A \to A$
$d(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) = a_1 a_2 \otimes a_3 \otimes \ldots \otimes a_n - a_1 \otimes a_2 a_3 \otimes a_4 \otimes \ldots \otimes a_n + \cdots \pm a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n-2} \otimes a_{n-1} a_n$
avec l'homotopie $H(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) = \pm 1 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n$, et
$C^n(A, A) = \mathrm{Hom}_{A-\mathrm{mod}-A}(A^{\otimes\, n+2}, A) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{vect}}(A^{\otimes\, n}, A)$,
$A \to \mathrm{Hom}(A, A) \to \mathrm{Hom}(A \otimes A, A) \to \ldots$

Autre description de $C(A, A)$: $\mathcal{F}$ la cogèbre co-associative libre à co-unité co-engendrée par $A[1]$. Le produit dans A donne $d_A \in \underline{Der}^1(\mathcal{F}, \mathcal{F})$, avec $[d_A, d_A] = 0$.

Fait : $C^\bullet(A, A)[1] = \underline{Der}^\bullet(\mathcal{F}, \mathcal{F})$ muni de la différentielle $[d_A, .]$.

Pour une $A_\infty-$algèbre, on a une $A_\infty-$structure : $d_A \in \underline{Der}^1(\mathcal{F})$, $d_A^2 = 0$; mais A n'est pas $\mathbb{Z}-$graduée.

De ces deux descriptions on déduit :
un produit associatif sur $HH^\bullet(A)$ (la composition des Ext), qui en fait une algèbre graduée commutative ;
un crochet de Lie sur $HH^\bullet(A)[1]$, qui en fait une algèbre de Lie graduée.

Le crochet $[.,.]$ est une dérivation dans l'algèbre commutative pour chacun de ses arguments.

Si $Conf_N(\mathbb{R}^2)$ est l'espace des configurations de $N \geqslant 0$ points, on en déduit une application Σ_N-équivariante :

$$H^\bullet(Conf_N(\mathbb{R}^2)) \otimes HH^\bullet(\mathcal{A})^{\otimes\, N} \to HH^\bullet(\mathcal{A}).$$

Exemple : $N = 2$, $Conf_2(\mathbb{R}^2) \to S^1$.

Complexe de Hochschild et déformations :

A un espace vectoriel gradué,
$\mathcal{F}$ la cogèbre libre à co-unité co-engendrée par $A[1]$, $\mathcal{F} \supset \mathcal{F}_+$ sans co-unité.

$\underline{Der}(\mathcal{F}) \supset \underline{Der}(\mathcal{F}_+)$ déformation de la $A_\infty-$algèbre A

La donnée de la $A_\infty-$ structure sur A équivaut à la donnée de $d_A \in \underline{Der}^1(\mathcal{F}_+)$, $[d_A, d_A] = 0$.
$d^2_{(0)} = 0$
$d' = d_{(0)} + \gamma$, $\gamma \in Der^1$
$(d')^2 = 0$ équivaut à $[d_{(0)}, \gamma] + \frac{1}{2}[\gamma, \gamma] = 0$.

X variété lisse, on définit

$$HH^\bullet(X) = \mathrm{Ext}^\bullet_{\mathrm{Coh}(X\times X)}(\mathcal{O}_{diag}, \mathcal{O}_{diag}).$$

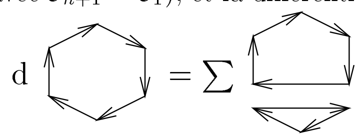
Théorème 1.

$$\mathrm{Ext}^k_{\mathrm{Coh}(T_X)}(\mathcal{O}_{\mathrm{sect.zero}}, \mathcal{O}_{\mathrm{sect.zero}}) = \bigoplus_{i+j=k} H^i(X, \bigwedge^j T_X).$$

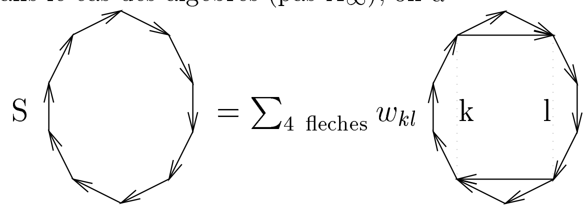
Etudions maintenant l'homologie cyclique périodique.
Homologie cyclique :

$$CL_.(\mathcal{A}) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \bigoplus_{\mathcal{E}_1 \ldots \mathcal{E}_n \in \mathrm{Ob}\mathcal{A}} (\bigotimes_{i=1}^{n} \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_{i+1})[1])$$

(avec $\mathcal{E}_{n+1} = \mathcal{E}_1$), et la différentielle



On a un opérateur $S : HC_. \to HC_{.-2}$, qui existe en fait au niveau des chaînes. Dans le cas des algèbres (pas A_∞), on a



$[S, d] = 0$ équivaut aux conditions suivantes :
$w_{kl} = -w_{lk}$
$w_{k,l+m} + w_{l,m+k} + w_{m,k+l} = w_{k,l+m+1} + w_{l,m+k+1} + w_{m,k+l+1}$
A un scalaire près, il y a une unique solution : $w_{00} = -1/6$, et si $k + l > 0$,

$$w_{kl} = \frac{k-l}{(k+l)(k+l+1)(k+l+2)}.$$

Exercice : faire ce calcul pour les $A_\infty-$algèbres.

On définit $HP_.$ comme la limite projective des $HC_.$ suivant S.
$HP_.$ est $\mathbb{Z}/2-$gradué, et il est muni d'une filtration. Si on déforme la $A_\infty-$algèbre, on obtient une connexion plate sur $HP_.$, ou un $D-$module (S.Getzler).

On s'attend à ce que pour A sur $\mathbb{C}$ on ait une "homologie de Betti", $HP \supset HP_{\mathbb{Q}}$, avec $HP = HP_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{C}$, ainsi qu'un caractère de Chern $Ch : K_0 \to HP$.

Pour des catégories saturées, il devrait y avoir une forme bilinéaire non nulle sur HP, avec pour $\mathcal{E}, \mathcal{F} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$,

$\sum(-1)^i \mathrm{rg}\ \mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F}[i]) = < Ch(\mathcal{E}), Ch(\mathcal{F}) >$.

Pour $\mathcal{A} = D(X)$, $\dim X = n$, $HP = H_{DR}$ avec la filtration $\bigoplus H^{pq}$.