RAPPORT SUR LES TRAVAUX EFFECTUÉS

CONG XUE

J'explique les résultats de mon article [Xue18a] (qui améliore ma thèse [Xue17]) et mon article [Xue18b].

1. Présentation du sujet et description rapide des résultats de [Xue18a] et [Xue18b]

1.1. **Formes automorphes.** Soit $\mathbb{F}_q$ un corps fini de caractéristique p. Soit X une courbe projective lisse géométriquement irréductible sur $\mathbb{F}_q$ et F son corps de fonctions. Soit G un groupe réductif connexe déployé sur $\mathbb{F}_q$.

Notons $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles de F et $\mathbb{O}$ l'anneau des adèles entières. Soit N un niveau, c'est-à-dire un sous-schéma fini de X. Notons $\mathcal{O}_N$ l'anneau des fonctions sur N et $K_N := \mathrm{Ker}(G(\mathbb{O}) \to G(\mathcal{O}_N))$ le sous-groupe compact ouvert de $G(\mathbb{A})$ associé à N.

Notons Z_G le centre de G. Soit Ξ un sous-groupe discret de $Z_G(\mathbb{A})$ tel que le quotient $Z_G(F)\backslash Z_G(\mathbb{A})/Z_G(\mathbb{O})\Xi$ soit fini de sorte que le volume de $G(F)\backslash G(\mathbb{A})/\Xi$ soit fini. On note $C_c(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi, \mathbb{Q}_\ell)$ l'espace des formes automorphes de niveau N.

Pour tout sous-groupe parabolique $P \subsetneq G$, on note U son radical unipotent. On a le morphisme terme constant :

$$C_G^P : C_c(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi, \mathbb{Q}_\ell) \to C(P(F)U(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi, \mathbb{Q}_\ell)$$

donné par $f \mapsto f^P : g \mapsto \int_{U(F)\backslash U(\mathbb{A})} f(ug)du$. Une fonction f est dite cuspidale si pour tout P comme ci-dessus, le terme constant f^P est nul. On note $C_c^{\mathrm{cusp}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi, \mathbb{Q}_\ell)$ l'espace des fonctions cuspidales. Un théorème de Harder dit que l'espace $C_c^{\mathrm{cusp}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi, \mathbb{Q}_\ell)$ est de dimension finie.

L'espace des formes automorphes $C_c(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi, \mathbb{Q}_\ell)$ est muni d'une action de l'algèbre de Hecke $\mathscr{H}_G = C_c(K_N\backslash G(\mathbb{A})/K_N, \mathbb{Q}_\ell)$ par produit de convolution à droite. Soit v une place de $X \smallsetminus N$. On note $\mathcal{O}_v$ l'anneau local complété en v et F_v son corps de fractions. Soit $\mathscr{H}_{G,v} := C_c(G(\mathcal{O}_v)\backslash G(F_v)/G(\mathcal{O}_v), \mathbb{Q}_\ell)$ l'algèbre de Hecke en la place v. Il est bien connu parmi les experts que $C_c(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi, \mathbb{Q}_\ell)$ est de type fini comme $\mathscr{H}_{G,v}$-module (donc de type fini comme $\mathscr{H}_G$-module).

1.2. **Cohomologie des champs de chtoucas.** On considère les champs classifiants des G-chtoucas, qui ont été introduits par Drinfeld dans [Dri87] pour $G = GL_r$ avec deux pattes et par Varshavsky dans [Var04] en général. Soient G et N comme avant, I un ensemble fini et W une représentation de $\widehat{G}^I$, où $\widehat{G}$ est le groupe dual de Langlands de G. On associe à ces donnés un champ classifiant les G-chtoucas sur X avec niveau N, que l'on note $\mathrm{Cht}_{G,N,I,W}$.

Dans [Var04] et [Laf12], Varshavsky et V. Lafforgue ont considéré la cohomologie ℓ-adique des champs de G-chtoucas pour ℓ un nombre premier different de p. Plus précisément, ils ont considéré les groupes de cohomologie à support compact $H^j_{G,N,I,W}$ en degré $j \in \mathbb{Z}$, pour le complexe d'intersection ℓ-adique de $\mathrm{Cht}_{G,N,I,W}/\Xi$. En particulier, quand $I = \emptyset$ et $W = \mathbf{1}$ (la triviale), on a $H^0_{G,N,\emptyset,\mathbf{1}} = C_c(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi, \mathbb{Q}_\ell)$.

1.3. **Les résultats.** Pour tout sous-groupe parabolique P et son quotient de Levi M, on définit les champs de P-chtoucas $\mathrm{Cht}_{P,N,I,W}$ et les champs de M-chtoucas $\mathrm{Cht}_{M,N,I,W}$. On utilise une variante $\mathrm{Cht}'_{P,N,I,W} := \mathrm{Cht}_{P,N,I,W} \overset{P(\mathcal{O}_N)}{\times} G(\mathcal{O}_N)$ et $\mathrm{Cht}'_{M,N,I,W} := \mathrm{Cht}_{M,N,I,W} \overset{P(\mathcal{O}_N)}{\times} G(\mathcal{O}_N)$. Les morphismes $G \hookleftarrow P \twoheadrightarrow M$ induisent une correspondance

$$\mathrm{Cht}_{G,N,I,W} \leftarrow \mathrm{Cht}'_{P,N,I,W} \rightarrow \mathrm{Cht}'_{M,N,I,W}.$$

Grâce à cette correspondance nous construirons un morphisme terme constant de la cohomologie du champ de G-chtoucas vers la cohomologie du champ de M-chtoucas

$$C^{P,j}_{G,N} : H^j_{G,N,I,W} \rightarrow H'^{\,j}_{M,N,I,W}. \tag{1.1}$$

Ainsi nous définissons la partie cuspidale $H^{j,\,\mathrm{cusp}}_{G,N,I,W}$ de $H^j_{G,N,I,W}$ comme l'intersection de noyaux de morphismes terme constant pour tout sous-groupe parabolique propre.

Théorème 1.1. ([Xue18a]) *Le $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel $H^{j,\,\mathrm{cusp}}_{G,N,I,W}$ est de dimension finie.*

Quand $I = \emptyset$ et $W = \mathbf{1}$, le morphisme terme constant ci-dessus $C^{P,0}_{G,N}$ coincide avec le morphisme terme constant pour les formes automorphes et $H^{0,\,\mathrm{cusp}}_{G,N,\emptyset,\mathbf{1}} = C_c^{\mathrm{cusp}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi, \mathbb{Q}_\ell)$. Ce théorème généralise le théorème de Harder.

Le groupe de cohomologie $H^j_{G,N,I,W}$ est muni d'une action des opérateurs de Hecke. On montre que les morphismes terme constant commutent avec les opérateurs de Hecke.

Dans [Laf12], V. Lafforgue a défini le sous-$\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel $H^{j,\,\mathrm{Hf\text{-}rat}}_{G,N,I,W}$ de $H^j_{G,N,I,W}$: une classe de cohomologie c dans $H^j_{G,N,I,W}$ est dite Hecke-finie au sens rationnel si l'espace $C_c(G(\mathbb{O})\backslash G(\mathbb{A})/G(\mathbb{O}), \mathbb{Q}_\ell) \cdot c$ est de dimension finie.

Proposition 1.2. ([Xue18a]) *Les deux sous-espaces vectoriels $H^{j,\,\mathrm{Hf\text{-}rat}}_{G,N,I,W}$ et $H^{j,\,\mathrm{cusp}}_{G,N,I,W}$ de $H^j_{G,N,I,W}$ sont égaux.*

De plus, utilisant les morphismes terme constant et leur commutativité avec les opérateurs de Hecke, on montre que

Théorème 1.3. ([Xue18b]) *Pour tout place v de $X \smallsetminus N$, le $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel $H^j_{G,N,I,W}$ est de type fini comme $\mathscr{H}_{G,v}$-module.*

A l'aide de ce théorème, on applique une variante de lemme de Drinfeld pour munir $H^j_{G,N,I,W}$ d'une action de $\mathrm{Weil}(\overline{F}/F)^I$, où $\overline{F}$ est une clôture algébrique de F. Ainsi on construit les opérateurs d'excursion agissant sur $C_c(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi, \mathbb{Q}_\ell)$. Leurs restrictions sur $C_c^{\mathrm{cusp}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi, \mathbb{Q}_\ell)$ coincident avec les opérateurs d'excursion construits dans [Laf12].

Une fois construits ces opérateurs d'excursion, un argument similaire à [Laf12] donne une décomposition canonique de tout quotient de $C_c(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi, \mathbb{Q}_\ell)$ associé à un système de valeurs propres de Hecke, et cette décomposition est indexée par des paramètres de Langlands globaux ℓ-adiques.

1.4. **Les nouveautés dans les preuves.** (1) Pour construire les morphismes terme constant, nous utilisons le morphisme lisse défini dans [Laf12] du champ de chtoucas vers un quotient de la grassmannienne affine de Beilinson-Drinfeld et la compatibilité de l'équivalence de Satake géométrique avec les foncteurs terme constant dans [BD99] et [BG02].

(2) nous ramenons l'étude du morphisme $\mathrm{Cht}_P \to \mathrm{Cht}_M$ à l'étude du morphisme $\mathrm{Gr}_P \to \mathrm{Gr}_M$ (qui est effectuée dans (1)) et celle du morphisme $\mathrm{Bun}_P \to \mathrm{Bun}_M$. Pour ce dernier, nous utilisons la contractibilité relative de la restriction du morphisme $\mathrm{Bun}_P \to \mathrm{Bun}_M$ sur les strates de Harder-Narasimhan assez profondes dans [DG15] et [DG16].

(3) nous montrons la finitude de la cohomologie cuspidale par récurrence sur le rang semi-simple. La récurrence montre en plus que la cohomologie des champs de chtoucas tronqués s'injecte dans la cohomologie des champs de chtoucas.

(4) une difficulté importante vient du fait que le morphisme terme constant a une infinité de composantes, indexées par le réseau de copoids de Z_M/Z_G, où Z_G est le centre de G et Z_M est le centre de M. Mais nous montrons que les index du support de l'image sont inclus dans un cône translaté dans ce réseau.

(5) la preuve du théorème 1.3 est basée sur la contractibilité dans (2). L'injectivité dans (3) joue aussi un rôle important dans cette preuve.

Pour simplifier les notations, dans la suite on considère seulement le cas sans niveau. On a les résultats analogues avec niveau.

2. Description détaillée des résultats dans [Xue18a]

2.1. **Champ de chtoucas et leur cohomologie.** Soit I un ensemble fini. Commençons par la définition du champ de chtoucas sans borne sur la position relative :

Définition 2.1. (champ de G-chtoucas) On note $\mathrm{Cht}_{G,I}$ le préchamp qui associe à tout schéma S sur $\mathbb{F}_q$ le groupoïde $\mathrm{Cht}_{G,I}(S)$ qui classifie la donnée de

(i) $x_i \in X(S)$ pour $i \in I$,

(ii) $\mathcal{G}$ un G-torseur sur $X \times S$,

(iii) un isomorphisme $\phi : \mathcal{G}\big|_{(X\times S)\smallsetminus(\bigcup_{i\in I}\Gamma_{x_i})} \xrightarrow{\sim} {}^{\tau}\mathcal{G}\big|_{(X\times S)\smallsetminus(\bigcup_{i\in I}\Gamma_{x_i})}$, où on note ${}^{\tau}\mathcal{G} := (\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_S)^*\mathcal{G}$ et on note Γ_{x_i} le graphe de $x_i : S \to X$ dans $X \times S$.

Le préchamp des chtoucas a un "modèle local" comme suit :

Définition 2.2. (grassmannienne affine de Beilinson-Drinfeld, [BD99]) On note $\mathrm{Gr}_{G,I}$ le préfaisceau qui associe à tout schéma S sur $\mathbb{F}_q$ l'ensemble $\mathrm{Gr}_{G,I}(S)$ qui classifie la donnée de
(i) $x_i \in X(S)$ pour $i \in I$,
(ii) G-torseurs $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ sur $\Gamma_{\sum \infty x_i}$, où on note $\Gamma_{\sum \infty x_i}$ le voisinage formel de $\bigcup_{i\in I} \Gamma_{x_i}$ dans $X \times S$,
(iii) un isomorphisme $\phi : \mathcal{G}_1|_{\Gamma_{\sum \infty x_i} \smallsetminus (\bigcup_{i\in I}\Gamma_{x_i})} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_2|_{\Gamma_{\sum \infty x_i} \smallsetminus (\bigcup_{i\in I}\Gamma_{x_i})}$, où le sens de l'isomorphisme sur $\Gamma_{\sum \infty x_i} \smallsetminus (\bigcup_{i\in I}\Gamma_{x_i})$ est le même que dans [Laf12].
(iv) une trivialisation $\theta : \mathcal{G}_2 \xrightarrow{\sim} G$ sur $\Gamma_{\sum \infty x_i}$.

Définissons $G_{I,\mathcal{O}}$ comme le préfaisceau sur X^I qui classifie le groupe des automorphismes du G-torseur trivial sur $\Gamma_{\sum \infty x_i}$. Notons $[G_{I,\mathcal{O}} \backslash \mathrm{Gr}_{G,I}]$ le quotient au sens des préchamps. Dans [Laf12], V. Lafforgue a considéré un morphisme :

$$\epsilon_G : \quad \mathrm{Cht}_{G,I} \quad \to \quad [G_{I,\mathcal{O}} \backslash \mathrm{Gr}_{G,I}]$$

donné par $(\phi : \mathcal{G} \to {}^{\tau}\mathcal{G}) \mapsto (\phi|_{\Gamma_{\sum \infty x_i}} : \mathcal{G}|_{\Gamma_{\sum \infty x_i}} \to {}^{\tau}\mathcal{G}|_{\Gamma_{\sum \infty x_i}})$ et il a montré que ce morphisme est formellement lisse.

Soit W une représentation de $\widehat{G}^I$. On peut définir un sous-schéma fermé $\mathrm{Gr}_{G,I,W}$ dans $\mathrm{Gr}_{G,I}$ en bornant la position relative (iii) par W. En particulier, quand I est un singleton et W la représentation irréductible de $\widehat{G}$ de plus haut poids λ, le sous-schéma fermé $\mathrm{Gr}_{G,I,W}$ est l'adhérence dans $\mathrm{Gr}_{G,I}$ de (la globalisation sur X de) la cellule de Schubert définie par λ. On peut généraliser cette définition à tout I et W.

Ensuite on définit le sous-champ fermé $\mathrm{Cht}_{G,I,W}$ de $\mathrm{Cht}_{G,I}$ comme l'image inverse de $[G_{I,\mathcal{O}} \backslash \mathrm{Gr}_{G,I,W}]$ par le morphisme ϵ_G.

De plus, d'après l'équivalence de Satake géométrique dans [MV07], on peut associer fonctoriellement à tout W un faisceau pervers à coefficient dans $\mathbb{Q}_\ell$ (à décalage près) et $G_{I,\mathcal{O}}$-équivariant sur $\mathrm{Gr}_{G,I}$. On note ce faisceau pervers $\mathcal{S}_{G,I,W}$. Lorsque W est irréductible, $\mathcal{S}_{G,I,W}$ est isomorphe au complexe d'intersection de $\mathrm{Gr}_{G,I,W}$.

Comme le morphisme ϵ_G est formellement lisse, l'image inverse de $\mathcal{S}_{G,I,W}$ (vu comme faisceau pervers sur $[G_{I,\mathcal{O}} \backslash \mathrm{Gr}_{G,I}]$) par le morphisme ϵ_G est un faisceau pervers (à décalage près) sur $\mathrm{Cht}_{G,I}$. On note ce faisceau pervers $\mathcal{F}_{G,I,W}$. Lorsque W est irréductible, $\mathcal{F}_{G,I,W}$ est isomorphe au complexe d'intersection de $\mathrm{Cht}_{G,I,W}$.

On considère la cohomologie ℓ-adique à support compact des champs de chtoucas comme dans [Laf12]. Pour cela, on considère la restriction de $\mathrm{Cht}_{G,I,W}$ sur $\overline{\eta^I}$, un point générique géométrique de X^I. Et on considère son quotient par Ξ. Le champ obtenu $\mathrm{Cht}_{G,I,W,\overline{\eta^I}}/\Xi$ est un champ algébrique de Deligne-Mumford qui n'est pas nécessairement de type fini. Néanmoins, il est limite inductive des sous-champs ouverts définis par les troncatures de Harder-Narasimhan, qui sont de type fini. On note ces sous-champs ouverts $\mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{G,I,W,\overline{\eta^I}}/\Xi$ pour $\mu \in \widehat{\Lambda}^+_{G^{\mathrm{ad}}}$, où $\widehat{\Lambda}^+_{G^{\mathrm{ad}}}$ est le réseau des copoids dominants du groupe adjoint de G. Ainsi, pour tout entier j, on définit $H^{j,\leq\mu}_{G,I,W}$ comme le groupe de cohomologie à support compact en degré j du faisceau pervers $\mathcal{F}_{G,I,W}$ restreint sur les $\mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{G,I,W,\overline{\eta^I}}/\Xi$. On définit $H^j_{G,I,W} := \varinjlim_\mu H^{j,\leq\mu}_{G,I,W}$.

La cohomologie ℓ-adique à support compact d'un champ de Deligne-Mumford de type fini est de dimension finie. Donc $H^j_{G,I,W}$ est la limite inductive de $\mathbb{Q}_\ell$-espaces vectoriels de dimension finie. Mais $H^j_{G,I,W}$ n'est pas nécessairement de dimension finie.

2.2. **Morphisme terme constant et cohomologie cuspidale.** En appliquant la définition 2.1 aux groupes P et M, on peut définir les champs $\mathrm{Cht}_{P,I}$ et $\mathrm{Cht}_{M,I}$ sur X^I. Soit W une représentation de $\widehat{G}^I$. Les morphismes $G \hookleftarrow P \twoheadrightarrow M$ induisent une correspondance au-dessus de X^I (où $\mathrm{Cht}_{P,I,W}$ est défini comme l'image inverse de $\mathrm{Cht}_{G,I,W}$ par $\mathrm{Cht}_{P,I} \to \mathrm{Cht}_{G,I}$ et $\mathrm{Cht}_{M,I,W}$ est défini en restreignant W de $\widehat{G}^I$ à $\widehat{M^I}$) :

(2.1)
$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Cht}_{P,I,W} \arrow[dl, "i"'] \arrow[dr, "\pi"] \arrow[dd] & \\ \mathrm{Cht}_{G,I,W} \arrow[dr] & & \mathrm{Cht}_{M,I,W} \arrow[dl] \\ & X^I & \end{tikzcd}$$

Le morphisme π est de type fini. Ainsi on a un complexe $\pi_! i^* \mathcal{F}_{G,I,W}$ dans $D^b_c(\mathrm{Cht}_{M,I,W})$. D'ailleurs, la définition dans la section 2.1 définit un faisceau pervers $\mathcal{F}_{M,I,W}$ sur $\mathrm{Cht}_{M,I,W}$.

Construction 2.3. On construit un morphisme de complexes dans $D^b_c(\mathrm{Cht}_{M,I,W})$:
$$\pi_! i^* \mathcal{F}_{G,I,W} \to \mathcal{F}_{M,I,W}.$$

Pour cela, on utilise deux ingrédients :

(i) la compatibilité de Satake géométrique avec l'induction parabolique. Précisément, pour la correspondance de grassmanniennes affines de Beilinson-Drinfeld :
$$\mathrm{Gr}_{G,I,W} \xleftarrow{i^0} \mathrm{Gr}_{P,I,W} \xrightarrow{\pi^0} \mathrm{Gr}_{M,I,W},$$
on a un isomorphisme canonique (à un décalage près sur chaque composante connexe)
$$\mathcal{S}_{M,I,W} \xrightarrow{\sim} (\pi^0)_! (i^0)^* \mathcal{S}_{G,I,W}.$$

(ii) le diagramme commutatif au-dessus de X^I :

(2.2)
$$\begin{tikzcd} \mathrm{Cht}_{G,I,W} \arrow[d, "\epsilon_G"] & \mathrm{Cht}_{P,I,W} \arrow[l, "i"'] \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\epsilon_P"] & \mathrm{Cht}_{M,I,W} \arrow[d, "\epsilon_M"] \\ {[G_{I,\mathcal{O}} \backslash \mathrm{Gr}_{G,I,W}]} & {[P_{I,\mathcal{O}} \backslash \mathrm{Gr}_{P,I,W}]} \arrow[l] \arrow[r] & {[M_{I,\mathcal{O}} \backslash \mathrm{Gr}_{M,I,W}]} \end{tikzcd}$$

Ensuite, on considère la restriction du diagramme (2.1) au dessus de $\overline{\eta^I}$. Et on considère les quotients par Ξ :

$$\mathrm{Cht}_{G,I,W,\overline{\eta^I}}/\Xi \longleftarrow \mathrm{Cht}_{P,I,W,\overline{\eta^I}}/\Xi \longrightarrow \mathrm{Cht}_{M,I,W,\overline{\eta^I}}/\Xi. \tag{2.3}$$

Le champ $\mathrm{Cht}_{M,I,W,\overline{\eta^I}}/\Xi$ est un champ algébrique de Deligne-Mumford qui a une infinité de composants connexes (on remarque que Ξ est un réseau dans $Z_G(F)\backslash Z_G(\mathbb{A})$ mais pas un réseau dans $Z_M(F)\backslash Z_M(\mathbb{A})$). On peut d'abord définir le groupe de cohomologie (tronquée par $\mu \in \widehat{\Lambda}^+_{G^{\mathrm{ad}}}$) composante par composante, pour chaque composante connexe on fait la même chose que pour G. Ensuite on définit $H^{j,\leq\mu}_{M,I,W}$ comme la somme directe pour toutes les composants connexes, complétée dans la direction du cône engendré par les coracines simples de G moins celles de M. Finalement on définit $H^j_{M,I,W} := \varinjlim_\mu H^{j,\leq\mu}_{M,I,W}$.

D'après [Var04], le morphisme $i : \mathrm{Cht}_{P,I,W,\overline{\eta^I}}/\Xi \to \mathrm{Cht}_{G,I,W,\overline{\eta^I}}/\Xi$ dans (2.3) est propre. En appliquant la correspondance cohomologique à ce diagramme et au morphisme de complexes de faisceaux $\pi_! i^* \mathcal{F}_{G,I,W} \to \mathcal{F}_{M,I,W}$, on obtient un morphisme pour tout degré j :

Définition 2.4.
$$C_G^{P,\,j} : H^j_{G,I,W} \to H^j_{M,I,W}.$$
On l'appelle morphisme terme constant pour le parabolique P.

Définition 2.5. Pour tout j, on définit la cohomologie cuspidale comme :
$$H^{j,\,\mathrm{cusp}}_{G,I,W} := \bigcap_{P\subsetneq G} \mathrm{Ker}\, C_G^{P,\,j}.$$

C'est un sous-$\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel de $H^j_{G,I,W}$.

2.3. **Finitude de la cohomologie cuspidale comme espace vectoriel.** Pour montrer que la cohomologie cuspidale est de dimension finie, on montre d'abord la contractibilité des fibres du morphisme de restriction de P à M pour les champs de chtoucas restreints sur les strates assez profondes.

Pour W fixé, l'action de $G_{I,\mathcal{O}}$ sur $\mathrm{Gr}_{G,I,W}$ se factorise par un quotient qui est un schéma en groupes de dimension fini noté $G_{I,d}$. On peut remplacer $[G_{I,\mathcal{O}}\backslash \mathrm{Gr}_{G,I,W}]$ par $[G_{I,d}\backslash \mathrm{Gr}_{G,I,W}]$ dans le diagramme (2.2), de même pour P et M. Notons

$$\widetilde{\mathrm{Cht}}_{M,I,W} := \mathrm{Cht}_{M,I,W} \underset{[M_{I,d}\backslash \mathrm{Gr}_{M,I}]}{\times} [P_{I,d}\backslash \mathrm{Gr}_{P,I}].$$

Le diagramme commutatif (2.2) induit un morphisme de champs :

$$\pi_d : \mathrm{Cht}_{P,I,W} \to \widetilde{\mathrm{Cht}}_{M,I,W}.$$

On considère les strates de Harder-Narasimhan, c'est-à-dire les sous-champs localement fermés $\mathrm{Cht}^{=\mu}_{G,I,W,\overline{\eta^I}}/\Xi$ pour $\mu \in \widehat{\Lambda}^+_{G^{\mathrm{ad}}}$. On dit qu'une strate est assez profonde pour un parabolique P si μ est assez loin des murs associés à P dans la chambre de Weyl du groupe adjoint de G.

Théorème 2.6. *(Énoncé géométrique) Les fibres du morphisme π_d restreint sur les strates de Harder-Narasimhan assez profondes (pour P) sont contractibles.*

Précisément, on montre que chaque fibre de la restriction du morphisme π_d sur les strates de Harder-Narasimhan assez profondes est un espace fibré de fibre un groupe unipotent sur le champ classifiant d'un autre groupe unipotent.

Ensuite, d'après [Var04], la restriction du morphisme i dans le diagramme (2.3) sur les strates assez profondes est un presque-isomorphisme (c'est-à-dire schematique, fini, bijectif et universellement injectif). On montre que ce fait et la contractibilité ci-dessus entraînent un isomorphisme pour le morphisme terme constant restreint sur les strates assez profondes :

Proposition 2.7. *(Énoncé cohomologique) Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, pour tout $\mu \in \widehat{\Lambda}^+_{G^{\mathrm{ad}}}$ assez loin des murs associés à P, le morphisme $C_G^{P,\, j,\, =\mu} : H^{j,\, =\mu}_{G,I,W} \to H^{j,\, =\mu}_{M,I,W}$, qui est la restriction du morphisme terme constant sur les groupes de cohomologie à support compact de $\mathrm{Cht}^{=\mu}_{G,I,W,\overline{\eta^I}}/\Xi$ et $\mathrm{Cht}^{=\mu}_{M,I,W,\overline{\eta^I}}/\Xi$, est un isomorphisme.*

Finalement, on montre la finitude de la cohomologie cuspidale à l'aide de la proposition suivante, qui est une conséquence de la proposition 2.7, grâce à un récurrence sur le rang semisimple de G.

Proposition 2.8. *(i) Il existe $\mu_0 \in \widehat{\Lambda}^+_{G^{\mathrm{ad}}}$ assez grand, tel que $H^{j,\,\mathrm{cusp}}_{G,I,W} \subset \mathrm{Im}(H^{j,\,\leq\mu_0}_{G,I,W} \to H^{j}_{G,I,W})$.*

(ii) Il existe $\mu_1 \in \widehat{\Lambda}^+_{G^{\mathrm{ad}}}$ assez grand, tel que le morphisme $H^{j,\,\leq\mu_1}_{G,I,W} \to H^{j}_{G,I,W}$ soit injectif.

Comme le groupe de cohomologie à support compact d'un champ de Deligne-Mumford de type fini est de dimension fini, on déduit de (i) que $H^{j,\,\mathrm{cusp}}_{G,I,W}$ est de dimension finie.

2.4. **Cohomologie Hecke-finie et cohomologie cuspidale.** L'algèbre de Hecke $C_c(G(\mathbb{O})\backslash G(\mathbb{A})/G(\mathbb{O}), \mathbb{Q}_\ell)$ agit sur $H^j_{G,I,W}$ par la correspondance de Hecke. On définit

$$H^{j,\,\text{Hf-rat}}_{G,I,W} := \{c \in H^j_{G,I,W},\ \dim_{\mathbb{Q}_\ell} C_c(G(\mathbb{O})\backslash G(\mathbb{A})/G(\mathbb{O}), \mathbb{Q}_\ell) \cdot c < +\infty\}.$$

De même, l'algèbre de Hecke $C_c(M(\mathbb{O})\backslash M(\mathbb{A})/M(\mathbb{O}), \mathbb{Q}_\ell)$ agit sur $H^j_{M,I,W}$ par la correspondance de Hecke. De plus, on a un morphisme des algèbres de Hecke :

$$C_c(G(\mathbb{O})\backslash G(\mathbb{A})/G(\mathbb{O}), \mathbb{Q}_\ell) \to C_c(M(\mathbb{O})\backslash M(\mathbb{A})/M(\mathbb{O}), \mathbb{Q}_\ell).$$

On vérifie que l'action de l'algèbre de Hecke commute avec le morphisme terme constant $C_G^{P,\,j}$ et donc préserve la cohomologie cuspidale. Par conséquent, la finitude de la cohomologie cuspidale implique que $H^{j,\,\mathrm{cusp}}_{G,I,W}$ est inclus dans $H^{j,\,\text{Hf-rat}}_{G,I,W}$. On montre enfin que

Proposition 2.9. *L'inclusion $H^{j,\,\mathrm{cusp}}_{G,I,W} \subset H^{j,\,\text{Hf-rat}}_{G,I,W}$ est une égalité.*

3. Description détaillée des résultats dans [Xue18b]

3.1. **Finitude de la cohomologie comme module sur une algèbre de Hecke.** Le théorème 1.3 est une conséquence directe de la proposition suivante :

Proposition 3.1. *Il existe $\mu_2 \in \widehat{\Lambda}^+_{G^{\mathrm{ad}}}$ assez grand, tel que*

$$H^j_{G,I,W} = \mathscr{H}_{G,v} \cdot H^{j,\leq\mu_2}_{G,I,W}.$$

Cette proposition est une conséquence du lemme suivant.

Pour toute racine simple α de G, soit P le sous-groupe parabolique standard avec quotient de Levi M tel que les racines simples de M sont les racines simples de G sauf α. Soit ω le copoids fundamental qui est orthogonal à toutes les racines autres que α. On note h^G_ω l'opérateur de Hecke dans $\mathscr{H}_{G,v}$ associé à la représentation de plus haut poids ω de $\widehat{G}$.

Lemme 3.2. *Pour tout α, P et ω comme ci-dessus, pour tout $\mu \in \widehat{\Lambda}^+_{G^{\mathrm{ad}}}$ assez grand, le morphisme induit par l'opérateur de Hecke h^G_ω :*

$$H^{j,\leq\mu+\check{\alpha}}_{G,I,W}/H^{j,\leq\mu}_{G,I,W} \xrightarrow{h^G_\omega} H^{j,\leq\mu+\check{\alpha}+\omega\deg(v)}_{G,I,W}/H^{j,\leq\mu+\omega\deg(v)}_{G,I,W}$$

est un isomorphisme.

La preuve de ce lemme utilise les propositions 2.7 et 2.8 (ii) pour se ramener au morphisme induit par h^G_ω :

$$H^{j,\leq\mu+\check{\alpha}}_{M,I,W}/H^{j,\leq\mu}_{M,I,W} \xrightarrow{h^G_\omega} H^{j,\leq\mu+\check{\alpha}+\omega\deg(v)}_{M,I,W}/H^{j,\leq\mu+\omega\deg(v)}_{M,I,W}.$$

Il est facile de vérifier que ceci est un isomorphisme.

3.2. **Opérateurs d'excursion.** On a noté η^I le point générique de X^I et on a fixé un point géométrique $\overline{\eta^I}$ au-dessus. On a une variante du lemme de Drinfeld :

Lemme 3.3. *Soit A un anneau commutatif sur $\mathbb{Q}_\ell$ engendré par un nombre fini d'éléments. Soit $\mathcal{M}$ un A-module de type fini, muni d'une action A-linéaire de $\pi_1(\eta^I, \overline{\eta^I})$ et d'une action de morphismes de Frobenius partiels compatibles entre elles. Alors $\mathcal{M}$ est muni d'une action de* $\mathrm{Weil}(\eta,\overline{\eta})^I$.

Appliquant ce lemme à $A = \mathscr{H}_{G,v}$ et $\mathcal{M} = H^j_{G,I,W}$ (où on utilise le résultat que $H^j_{G,I,W}$ est un $\mathscr{H}_{G,v}$-module de type fini), on obtient une action de $\mathrm{Weil}(\eta,\overline{\eta})^I = \mathrm{Weil}(\overline{F}/F)^I$ sur $H^j_{G,I,W}$.

On note $\Delta : X \to X^I$ le morphisme diagonal. Fixons un morphisme de specialisation $\mathfrak{sp} : \overline{\eta^I} \to \Delta(\overline{\eta})$. Il induit un homomorphisme de specialisation $\mathfrak{sp}^* : \mathcal{H}^j_{I,W}\big|_{\Delta(\overline{\eta})} \to \mathcal{H}^j_{I,W}\big|_{\overline{\eta^I}}$. Dans [Laf12], V. Lafforgue a montré que ce morphisme est injectif. A l'aide du théorème 1.3, on montre qu'il est aussi surjectif.

Construction 3.4. Soit I et W comme précédemment. Soit $x \in W$ et $\xi \in W^*$ invariants par l'action diagonale de $\widehat{G}$. Soit $(\gamma_i)_{i\in I} \in \mathrm{Weil}(\overline{F}/F)^I$. On construit un opérateur d'excursion $S_{I,W,x,\xi,(\gamma_i)_{i\in I}}$ sur $C_c(\mathrm{Bun}_G(\mathbb{F}_q)/\Xi, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) = C_c(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/G(\mathbb{O})\Xi, \mathbb{Q}_\ell)$ comme le composé :

$$\begin{tikzcd} C_c(\mathrm{Bun}_G(\mathbb{F}_q)/\Xi, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) \arrow[r, "\mathcal{C}_x^\sharp"] & \mathcal{H}^0_{I,W}\big|_{\Delta(\overline{\eta})} \arrow[r, "\mathfrak{sp}^*", "\sim"'] & \mathcal{H}^0_{I,W}\big|_{\overline{\eta^I}} \arrow[d, "(\gamma_i)_{i\in I}"] \\ C_c(\mathrm{Bun}_G(\mathbb{F}_q)/\Xi, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) & \mathcal{H}^0_{I,W}\big|_{\Delta(\overline{\eta})} \arrow[l, "\mathcal{C}_\xi^\flat"'] & \mathcal{H}^0_{I,W}\big|_{\overline{\eta^I}} \arrow[l, "(\mathfrak{sp}^*)^{-1}"', "\sim"] \end{tikzcd}$$

où $\mathcal{C}_x^\sharp$ et $\mathcal{C}_\xi^\flat$ sont définis dans [Laf12] definitions 5.1, 5.2 et (9.1).

La restriction de $S_{I,W,x,\xi,(\gamma_i)_{i\in I}}$ ci-dessus sur $C_c^{\mathrm{cusp}}(\mathrm{Bun}_G(\mathbb{F}_q)/\Xi, \mathbb{Q}_\ell)$ coincide avec celui défini dans [Laf12].

Soit J un ensemble fini et V une représentation de $\widehat{G}^J$. On construit aussi des opérateurs d'excursion agissant sur $H^j_{G,J,V}$ et $H^{j,\,\mathrm{cusp}}_{G,J,V}$.

Soit $\mathscr{I}$ un idéal de codimension finie de $\mathscr{H}_{G,v}$. Soit $\mathcal{B}_{\mathscr{I}}$ l'algèbre d'opérateurs d'excursion agissant sur l'espace vectoriel quotient $C_c(\mathrm{Bun}_G(\mathbb{F}_q)/\Xi, \overline{\mathbb{Q}_\ell})/\mathscr{I} \cdot C_c(\mathrm{Bun}_G(\mathbb{F}_q)/\Xi, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$. On a un théorème qui généralise le théorème 0.1 de [Laf12].

Théorème 3.5. *On a une décomposition canonique de $\mathscr{H}_G$-modules :*

$$C_c(\mathrm{Bun}_G(\mathbb{F}_q)/\Xi, \overline{\mathbb{Q}_\ell})/\mathscr{I} \cdot C_c(\mathrm{Bun}_G(\mathbb{F}_q)/\Xi, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) = \oplus_\sigma \mathfrak{H}_\sigma$$

où la somme directe est indexée par des classes de $\widehat{G}(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$-conjugaison de morphismes $\sigma : \mathrm{Weil}(\overline{F}/F) \to \widehat{G}(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$ définis sur une extension finie de $\mathbb{Q}_\ell$, continus, semi-simples and non ramifiés.

Cette décomposition est caractérisée par la propriété suivante : $\mathfrak{H}_\sigma$ est égal à l'espace propre généralisé $\mathfrak{H}_\nu$ associé au caractère ν de $\mathcal{B}_{\mathscr{I}}$ défini par $\nu(S_{I,W,x,\xi,(\gamma_i)_{i\in I}}) = \langle \xi, (\sigma(\gamma_i))_{i\in I} \cdot x\rangle$.

Elle est compatible avec l'isomorphisme de Satake en toute place de X.

De plus, on montre que les opérateurs d'excursion commutent avec les morphismes terme constant. Cela implique la compatibilité avec l'induction parabolique de la décomposition ci-dessus.

Références

[BD99] A. Beilinson and V. Drinfeld. Quantization of Hitchin's integrable system and Hecke eigensheaves (1999), available at the address
`http://math.uchicago.edu/~mitya/langlands.html`

[BG02] A. Braverman and D. Gaitsgory. Geometric Eisenstein series. *Invent. Math.* **150** (2) 287–384 (2002)

[Dri87] V. G. Drinfeld. Moduli varieties of F-sheaves. *Func. Anal. and Appl.* **21**, 107–122 (1987)

[DG15] V. G. Drinfeld and D. Gaitsgory. Compact generation of the category of D-modules on the stack of G-bundles on a curve. *Cambridge Journal of Mathematics* Volume 3, Number 1-2, 19–125 (2015)

[DG16] V. G. Drinfeld and D. Gaitsgory. Geometric constant term functor(s). *Sel. Math. New Ser.* (2016) 22 :1881-1951

[GeLa17] A. Genestier et V. Lafforgue. Chtoucas restreints pour les groupes réductifs et paramétrisation de Langlands locale. Preprint, arXiv :1709.00978 (2017)

[Laf12] Vincent Lafforgue. Chtoucas pour les groupes réductifs et paramétrisation de Langlands globale. *Preprint.* `http://arxiv.org/abs/1209.5352` (2012)

[MV07] I. Mirkovic and K. Vilonen. Geometric Langlands duality and representations of algebraic groups over commutative rings. *Annals of Math.* **166**, 95–143 (2007)

[Var04] Y. Varshavsky. Moduli spaces of principal F-bundles. *Selecta Math. (N.S.)* **10** (1), 131–166 (2004)

[Xue17] C. Xue. Cohomologie cuspidale des champs de chtoucas. Thèse de doctorat, Université Paris-Saclay (2017)

[Xue18a] C. Xue. Cuspidal cohomology of stacks of shtukas. *Preprint.* arXiv :1802.01362

[Xue18b] C. Xue. Finiteness of cohomologies of stacks of shtukas as modules over Hecke algebras, and applications. *Preprint.* arXiv :1811.09513