Pour les ℓ tels que $\mathrm{End}(A) \otimes \mathbb{Z}_\ell$ soit un ordre maximal dans l'algèbre semi-simple $\mathrm{End}(A) \otimes \mathbb{Q}_\ell$, et que $\mathbb{Z}_\ell[\mathrm{Gal}(\bar{K}/k)]$ ait pour image dans $\mathrm{End}(T_\ell(A))$ le commutant de $\mathrm{End}(A)$, il n'y a même qu'une orbite.

Soit G le groupe algébrique sur $\mathbb{Q}$ groupe multiplicatif de la $\mathbb{Q}$-algèbre $\mathrm{End}(A) \otimes \mathbb{Q}$. C'est un groupe réductif. Le groupe adélique $G(\mathbb{A}^f)$ agit sur les systèmes de réseaux (T_ℓ'), et ce qui précède montre qu'il n'y a qu'un nombre fini d'orbites. Pour chacune, l'ensemble des classes d'isomorphie de variétés abéliennes correspondantes s'identifie à un ensemble de doubles classes $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}^f)/K$, avec K sous-groupe compact ouvert de $G(\mathbb{A}^f)$. Un tel ensemble est fini, et le corollaire en résulte.

COROLLAIRE 2.9.— *Sur un corps de nombres k, les variétés abéliennes polarisées (A,θ), de degré de polarisation n fixé, avec A isogène à une variété abélienne fixe B, ne forment qu'un nombre fini de classes d'isomorphie.*

Preuve.— Appliquer 1.26 (ii).

3. LA CONJECTURE DE SHAFAREVITCH

THÉORÈME 3.1.— *Soient k un corps de nombres, $\bar{K}$ une clôture algébrique de k, S un ensemble fini de places finies de k, ℓ un nombre premier et d un entier. Il existe un ensemble fini T de places finies de k, disjoint de S, tel qu'une représentation ℓ-adique semi-simple de dimension d, $\rho : \mathrm{Gal}(\bar{K}/k) \to GL(d,\mathbb{Q}_\ell)$, non ramifiée en dehors de S, soit uniquement déterminée (à isomorphisme de représentations près) par les traces $\mathrm{Tr}(\rho(\varphi_v))$, pour $v \in T$.*

On sait (Hermite) qu'il n'existe qu'un nombre fini d'extensions galoisiennes k' de k, non ramifiées en dehors de S et de degré borné. D'après Čebotarev, il existe donc un ensemble fini T de places de k, disjoint de S, tel que les classes de conjugaison des Frobenius φ_v $(v \in T)$ remplissent tout $\mathrm{Gal}(\bar{K}'/k)$, pour toute extension galoisienne k' de k, non ramifiée en dehors de S, de degré $\leq \ell^{2d^2}$. Prouvons que T convient.

Soient donc ρ_1, ρ_2 deux représentations ℓ-adiques du type dit, avec $\mathrm{Tr}\, \rho_1(F_v) = \mathrm{Tr}\, \rho_2(F_v)$ pour $v \in T$. Nous voulons montrer que ρ_1 et ρ_2 ont même caractère, donc, étant semi-simples, sont isomorphes. Soit M l'image de l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell[\mathrm{Gal}(\bar{K}/k)]$ par

$$\rho_1 \times \rho_2 : \mathbb{Z}_\ell[\mathrm{Gal}(\bar{K}/k)] \longrightarrow M_d(\mathbb{Q}_\ell) \times M_d(\mathbb{Q}_\ell) .$$

Il s'agit de vérifier que, sur M, la forme linéaire $\delta(m_1,m_2) := \mathrm{Tr}(m_1) - \mathrm{Tr}(m_2)$ est identiquement nulle. L'algèbre M est un $\mathbb{Z}_\ell$-module de rang $\leq 2d^2$. L'image de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/k)$ dans le quotient $(M/\ell M)^*$ a donc moins de ℓ^{2d^2} éléments et, par hypothèse, chaque élément de cette image est un $(\rho_1 \times \rho_2)(\varphi_v)$; $v \in T$. Par Nakayama, les $(\rho_1 \times \rho_2)(\varphi_v)$ $(v \in T)$ engendrent $\mathbb{Z}_\ell$-linéairement M. Sur eux, la forme linéaire δ s'annule par hypothèse, d'où $\delta = 0$ sur M.

Remarque.— Un énoncé plus faible que 3.1 avait été obtenu par J.-P. Serre, modulo une hypothèse de Riemann généralisée.

COROLLAIRE 3.2.— *Soient k un corps de nombres et S un ensemble fini de places de k. Il n'y a qu'un nombre fini de classes d'isogénie de variétés abéliennes de dimension g sur k, à bonne réduction en dehors de S.*

On fixe un nombre premier ℓ et on applique 3.1 à $S \cup \{\text{places divisant } \ell\}$, ℓ et $d = 2g$. Pour chaque variété abélienne A du type considéré, la représentation ℓ-adique $V_\ell(A) := T_\ell(A) \otimes \mathbb{Q}_\ell$ est semi-simple (par 2.7), et il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour la trace de φ_v $(v \in T)$: par A. Weil, elle est entière et bornée par $2g\sqrt{q_v}$. Il n'y a donc qu'un nombre fini de possibilités pour la classe d'isomorphie de $V_\ell(A)$, et on conclut par la conjecture de Tate.

De ce corollaire on déduit par 2.8 et 2.9 :

COROLLAIRE 3.3.— *Soient k un corps de nombres et S un ensemble fini de places de k. Il n'y a qu'un nombre fini de classes d'isomorphie de variétés abéliennes de dimension g sur k, à bonne réduction en dehors de S.*

COROLLAIRE 3.4.— *Soient k un corps de nombres et S un ensemble fini de places de k. Il n'y a qu'un nombre fini de classes d'isomorphie de variétés abéliennes polarisées (A,θ) sur k, de dimension g et de degré de polarisation n, à bonne réduction en dehors de S.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. ASH, D. MUMFORD, M. RAPOPORT and Y. TAI - *Smooth compactification of locally symmetric varieties*, Math. Sci. Press, Brookline, 1975.

[2] G. FALTINGS - *Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern*, Inv. Math. 73 (1983), 349-366.

[3] M. RAYNAUD - *Schémas en groupes de type* (p,...,p), Bull. Soc. Math. France 102 (1974), 241-280.

[4] J. TATE - *p-divisible groups*, Proc. of a conf. on local fields (Driebergen 1966), 158-183, Springer-Verlag, New York, 1967.

Pierre DELIGNE

Institut des Hautes Études Scientifiques
F-91440 BURES sur YVETTE