Finitude de l'extension de $\mathbb{Q}$ engendrée par des traces de Frobenius, en caractéristique finie

Pierre Deligne

dédié à la mémoire de I. M. Gelfand

Résumé. Soient Z_0 un schéma de type fini sur $\mathbb{F}_q$ et $\mathcal{F}_0$ un $\overline{\mathbb{Q}}_l$-faisceau sur Z_0. Nous montrons qu'il existe une extension de type fini $E \subset \overline{\mathbb{Q}}_l$ de $\mathbb{Q}$ telle que les facteurs locaux de la fonction L de $\mathcal{F}_0$ soient tous à coefficients dans E. Si Z_0 est normal connexe et que $\mathcal{F}_0$ est un système local l-adique irréductible, dont le déterminant est d'ordre fini, on peut prendre pour E une extension finie de $\mathbb{Q}$.

Abstract. Let $\mathcal{F}_0$ be a $\overline{\mathbb{Q}}_l$-sheaf on a scheme Z_0 of finite type over $\mathbb{F}_q$. We show the existence of a finite type extension $E \subset \overline{\mathbb{Q}}_l$ of $\mathbb{Q}$, such that all local factors of the L-function of $\mathcal{F}_0$ have coefficients in E. When Z_0 is normal and connected, and $\mathcal{F}_0$ an irreducible l-adic local system whose determinant is of finite order, E can be taken to be a finite extension of $\mathbb{Q}$.

Sommaire

0. Introduction.

0.0 Fixons les notations suivantes:

$\mathbb{F}_q$: un corps fini à q éléments, de caractéristique p;

$\mathbb{F}$: une clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$;

$\mathbb{F}_{q^n}$: l'extension de degré n de $\mathbb{F}_q$ dans $\mathbb{F}$;

$W(\mathbb{F}/\mathbb{F}_{q^n})$: le sous-groupe $\mathbb{Z}$ de $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{F}_{q^n}) = \widehat{\mathbb{Z}}$ engendré par le Frobenius géométrique F (l'inverse de $x \mapsto x^{q^n}$);

l : un nombre premier autre que p;

$\overline{\mathbb{Q}}_l$: une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_l$.

Un objet sur $\mathbb{F}_q$ sera affecté d'un indice 0, et la suppression de cet indice indiquera l'extension du corps de base de $\mathbb{F}_q$ à $\mathbb{F}$.

Pour un résumé du formalisme des $\overline{\mathbb{Q}}_l$-faisceaux, et de celui des $\mathbb{Q}_l$-faisceaux de Weil, je renvoie à [De2] 1.1.1 et 1.1.10.

Soient $\bar{X}_0$ une courbe projective lisse et absolument irréductible sur $\mathbb{F}_q$, S_0 un ensemble fini de points fermés de $\bar{X}_0$ et $X_0 := \bar{X}_0 - S_0$. On notera K_0 le corps de fonctions rationnelles sur X_0 et $\mathbb{A}$ l'anneau de ses adèles.

0.1. Lafforgue [L] fournit une bijection naturelle entre

(A) Classes d'isomorphie de $\overline{\mathbb{Q}}_l$-faisceaux de Weil lisses irréductibles de rang r sur X_0, et

(B) Représentations automorphes cuspidales π de $\mathrm{GL}(r, \mathbb{A})$, non ramifiées en dehors de S_0.

Cette bijection est caractérisée par l'égalité en chaque point fermé x_0 de X_0 de facteurs locaux de fonctions L attachés aux objets (A) et (B).

Dans (B), la notion de représentation automorphe cuspidale est purement algébrique: on peut prendre comme corps de coefficients n'importe quel corps k algébriquement clos de caractéristique 0. On prend $k = \overline{\mathbb{Q}}_l$. La topologie de $\overline{\mathbb{Q}}_l$ ne joue aucun rôle.

Si Z_0 est un schéma de type fini sur $\mathbb{F}_q$, l'action sur $\mathbb{F}$ de $W(\mathbb{F}/\mathbb{F}_q)$ induit une action de ce groupe de Weil sur $Z = Z_0 \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}$. Un *$\overline{\mathbb{Q}}_l$-faisceau de Weil* $\mathcal{F}_0$ sur Z_0 est un $\overline{\mathbb{Q}}_l$-faisceau $\mathcal{F}$ sur Z, muni d'une action de $W(\mathbb{F}/\mathbb{F}_q)$ sur $(Z, \mathcal{F})$ relevant son action sur Z. La notion de $\overline{\mathbb{Q}}_l$-faisceau est définie par passages à la limite à partir de celle de faisceau étale de $\mathcal{O}_\lambda/I$-module, pour $\mathcal{O}_\lambda$ la clôture intégrale de $\mathbb{Z}_l$ dans une extension finie $E_\lambda \subset \overline{\mathbb{Q}}_l$ de $\mathbb{Q}_l$, et I une puissance de l'idéal maximal. La topologie de $\overline{\mathbb{Q}}_l$ joue ici un rôle crucial. Une conséquence surprenante de l'équivalence entre (A) et (B) est que, dans le cas des faisceaux lisses semi-simples sur les courbes, ce rôle est illusoire.

0.2. On prendra garde que Lafforgue suppose choisi un isomorphisme $\iota\colon\ \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{Q}}_l$, et l'utilise pour comparer plutôt représentations automorphes au sens classique (corps de coefficients $\mathbb{C}$) et $\overline{\mathbb{Q}}_l$-faisceaux. Si on utilise l'isomorphisme ι pour remplacer les représentations automorphes cuspidales à coefficients dans $\mathbb{C}$ par celles à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$, la correspondance obtenue dépend, si r est pair et q une puissance impaire de p, de la racine carrée $\iota\left(\sqrt{q}\right)$ de q dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$. Changer $\sqrt{q}$ en $-\sqrt{q}$ change la correspondance en sa composée avec la torsion (voir 0.3) par le caractère $n \mapsto (-1)^{n(r-1)}$ de $W(\mathbb{F}/\mathbb{F}_q) = \mathbb{Z}$.

A la correspondance utilisée par Lafforgue nous préférons sa tordue par le caractère $n \mapsto \left(\sqrt{q}\right)^{n(r-1)}$ de $W(\mathbb{F}/\mathbb{F}_q)$. Cette *correspondance rationalisée* fournit une bijection entre (A) et (B) indépendante de ι.

0.3. Tant pour les objets (A) que pour les objets (B) la torsion par un caractère $\chi\colon\ W(\mathbb{F}/\mathbb{F}_q) = \mathbb{Z} \to \overline{\mathbb{Q}}_l{}^*$ est définie, et ces torsions se correspondent.

L'ensemble des caractères χ de $W(\mathbb{F}/\mathbb{F}_q)$ est en bijection naturelle avec l'ensemble des classes d'isomorphie de $\overline{\mathbb{Q}}_l$-faisceau de Weil de rang un $\mathcal{L}_0$ sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$, et pour les objets (A) la torsion est donnée par le produit tensoriel avec l'image inverse, par $X_0 \to \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$, d'un tel faisceau.

Soit $v\colon\ \mathbb{A}^* \to \mathbb{Z}$ l'homomorphisme tel que $\|x\| = q^{-v(x)}$. Il se factorise par le groupe des classes d'idèles $K_0^* \setminus \mathbb{A}^*$. Dans (B), si π est une représentation automorphe cuspidale de $\mathrm{GL}(r, \mathbb{A})$, vue comme contenue dans l'espace des fonctions localement constantes sur $\mathrm{GL}(r, K_0) \setminus \mathrm{GL}(r, \mathbb{A})$, la tordue $\pi\chi$ de π par χ est l'espace des fonctions $f(x)\chi(v(\det x))$ pour f dans π.

Nous dirons parfois "torsion par b" pour "torsion par le caractère χ de $\mathbb{Z}$ tel que $\chi(1) = b$".

0.4. Les $\overline{\mathbb{Q}}_l$-faisceaux forment une sous-catégorie abélienne pleine de la catégorie abélienne des $\overline{\mathbb{Q}}_l$-faisceaux de Weil. Sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$, la classe d'isomorphie d'un $\overline{\mathbb{Q}}_l$-faisceau de Weil de rang un $\mathcal{L}_0$ est déterminée par un caractère $\chi\colon\ W(\mathbb{F}/\mathbb{F}_q) = \mathbb{Z} \to \overline{\mathbb{Q}}_l{}^*$, et pour que $\mathcal{L}_0$ soit un $\overline{\mathbb{Q}}_l$-faisceau il faut et il suffit que χ se prolonge en un caractère continu de $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{F}_q) = \widehat{\mathbb{Z}}$, i.e. que $\chi(1)$ soit une unité l-adique. C'est ce qui oblige dans 0.1 (A) à utiliser les $\overline{\mathbb{Q}}_l$-faisceaux de Weil. Si on voulait dans (A) se limiter aux $\overline{\mathbb{Q}}_l$-faisceaux, il faudrait dans (B) se limiter aux représentations automorphes cuspidales π dont le caractère central ω_π se prolonge en un caractère continu du complété profini du groupe des classes d'idèles. Ceci détruirait le caractère purement algébrique de (B).

Les théorèmes suivants permettent de passer des $\overline{\mathbb{Q}}_l$-faisceaux aux $\overline{\mathbb{Q}}_l$-faisceaux de Weil.

(a) Soient Z_0 une variété connexe normale de type fini sur $\mathbb{F}_q$, et $\mathcal{F}_0$ un $\overline{\mathbb{Q}}_l$-faisceau de Weil lisse irréductible de rang r sur Z_0. Alors, $\mathcal{F}_0$ est un $\overline{\mathbb{Q}}_l$-faisceau si et seulement si $\det(\mathcal{F}_0) := \wedge^r \mathcal{F}_0$ en est un ([De2] 1.3.14).

(b) Soit $\mathcal{L}_0$ un $\overline{\mathbb{Q}}_l$-faisceau de Weil lisse de rang un sur Z_0. Definition: $\mathcal{L}_0$ est d'*ordre fini* s'il existe $N>0$ tel que $\mathcal{L}_0^{\otimes N}$ soit isomorphe au faisceau constant $\overline{\mathbb{Q}}_l$. Il existe toujours $N>0$ tel que $\mathcal{L}_0^{\otimes N}$ soit l'image inverse d'un faisceau de Weil sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$ ([De2] 1.3.4 (i)). Le groupe (pour $\otimes$) des classes d'isomorphie de faisceaux de Weil de rang un sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$ est divisible. Tout $\mathcal{L}_0$ est donc le produit tensoriel d'un $\mathcal{L}_0'$, d'ordre fini, et de l'image inverse d'un faisceau de Weil $\mathcal{L}_0''$ sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$. Pour que $\mathcal{L}_0$ soit un $\overline{\mathbb{Q}}_l$-faisceau, il faut et suffit que $\mathcal{L}_0''$ en soit un.

(c) Tout $\mathcal{F}_0$ comme en (a) est donc déduit par torsion d'un $\overline{\mathbb{Q}}_l$-faisceau $\mathcal{F}_0'$ tel que $\det(\mathcal{F}_0')$ soit d'ordre fini, et $\mathcal{F}_0$ un $\overline{\mathbb{Q}}_l$-faisceau si et seulement si la torsion est le produit tensoriel avec l'image inverse d'un $\overline{\mathbb{Q}}_l$-faisceau de rang un sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$.

Dans [L], Lafforgue énonce la correspondance entre (A) et (B) en se limitant dans (A) aux $\overline{\mathbb{Q}}_l$-faisceaux lisses irréductibles dont le déterminant est d'ordre fini, et en imposant dans (B) une restriction correspondante aux représentations automorphes. Ce qui précède montre qu'il n'y perd rien.

0.5 Notations. Soient $\mathcal{F}_0$ un $\overline{\mathbb{Q}}_l$-faisceau de Weil sur Z_0 de type fini sur $\mathbb{F}_q$, x_0 un point fermé de Z_0 et $\deg(x_0) := [k(x_0)\colon \mathbb{F}_q]$ son degré. Le choix de $\bar{x}$ dans Z au-dessus de x_0 définit un plongement de $k(x_0)$ dans $k(\bar{x})=\mathbb{F}$. Le groupe de Weil $W(\mathbb{F}/k(x_0))$ est engendré par le Frobenius géométrique F_{x_0}. Il est d'indice $\deg(x_0)$ dans $W(\mathbb{F}/\mathbb{F}_q)$, fixe $\bar{x}$ et agit sur la fibre $\mathcal{F}_{\bar{x}}$ de $\mathcal{F}_0$ en le point géométrique $\bar{x}$. En particulier, F_{x_0} agit sur $\mathcal{F}_{\bar{x}}$. Le facteur local en x_0 de la fonction L de $\mathcal{F}_0$ est

$$\det(1-F_{x_0}t^{\deg(x_0)},\mathcal{F}_{\bar{x}})^{-1}. \tag{0.5.1}$$

Il ne dépend pas de $\bar{x}$, seulement de x_0.

Soient $n\geq 1$ et x un $\mathbb{F}_{q^n}$-point de Z_0: $x\in Z_0(\mathbb{F}_{q^n})$. Le point x est un $\mathbb{F}_q$-morphisme $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_{q^n})\to Z_0$. Soient x_0 le point fermé de Z_0 qui en est l'image, et $\bar{x}$ le point géométrique $\mathrm{Spec}(\mathbb{F})\to\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_{q^n})\xrightarrow{x}Z_0$. On notera F_x le générateur "Frobenius géométrique" de $W(\mathbb{F}/\mathbb{F}_{q^n})$. On a $W(\mathbb{F}/\mathbb{F}_{q^n})\subset W(\mathbb{F}/k(x_0))$, et

$$F_x = F_{x_0}^{n/\deg(x_0)}. \tag{0.5.2}$$

On dira "action de F_x (resp. F_{x_0}) sur $\mathcal{F}_0$" pour "action de F_x (resp. F_{x_0}) sur $\mathcal{F}_{\bar{x}}$". Avec cet abus de language, le facteur local (0.5.1) s'écrit

$$\det(1-F_{x_0}t^{\deg(x_0)},\mathcal{F}_0)^{-1}.$$

Il nous sera commode de considérer, plutôt que ces facteurs locaux, les traces $\mathrm{Tr}(F_x, \mathcal{F}_0)$ pour x dans un $Z_0(\mathbb{F}_{q^n})$. L'identité entre séries formelles

$$\log\, \det(1 - ft, V) = - \sum_{n \geq 1} \mathrm{Tr}(f^n, V) \frac{t^n}{n},$$

pour f un endomorphisme de V, montre que ces traces pour x au-dessus de x_0 et le facteur local en x_0 se déterminent l'un l'autre.

Lafforgue [L] VII 6 prouve le théorème suivant, dans lequel (ii) et (iii) résultent de l'équivalence entre (A) et (B) de 0.1.

Théorème 0.6 (Lafforgue)**.** *Soient $X_0/\mathbb{F}_q$ comme en 0.0, et $\mathcal{F}_0$ un $\overline{\mathbb{Q}}_l$-faisceau de Weil lisse irréductible de rang r sur X_0, dont le déterminant* $\det(\mathcal{F}_0)$ *est d'ordre fini.*

(i) *En tout point fermé x_0 de X_0, les valeurs propres de F_{x_0} agissant sur $\mathcal{F}_0$ sont des nombres de Weil de poids* 0*, i.e. sont des nombres algébriques de valeur absolue un en toute place ne divisant pas p. En particulier, $\mathcal{F}_0$ est pur de poids* 0*.*

(ii) *Il existe une extension finie $E \subset \overline{\mathbb{Q}}_l$ de $\mathbb{Q}$ telle que pour tout point fermé x_0 de X_0, le polynôme* $\det(1 - F_{x_0}t, \mathcal{F}_0)$ *soit à coefficients dans E.*

(iii) *Pour E comme en (ii), pour tout nombre premier $l' \neq p$ et pour tout plongement σ de E dans $\overline{\mathbb{Q}}_{l'}$, il existe un $\overline{\mathbb{Q}}_{l'}$-faisceau de Weil lisse $\mathcal{F}'_0$ sur X_0, tel qu'en tout point fermé x_0 de X_0 on ait*

$$\det(1 - F_{x_0}t, \mathcal{F}'_0) = \sigma\ \det(1 - F_{x_0}t, \mathcal{F}_0)$$

L'extension E minimale est le corps de définition de la représentation automorphe π correspondant à $\mathcal{F}_0$, vue au choix comme classe d'isomorphie de représentation de $\mathrm{GL}(r, \mathbb{A})$ ou comme sous-espace de l'espace des fonctions sur $\mathrm{GL}(r, K_0) \setminus \mathrm{GL}(r, \mathbb{A})$. Il faut ici utiliser la correspondance rationalisée de 0.2.

0.7. Soient Z_0 un schéma connexe normal de type fini sur $\mathbb{F}_q$ et $\mathcal{F}_0$ un $\overline{\mathbb{Q}}_l$-faisceau de Weil lisse irréductible sur Z_0, dont le déterminant est d'ordre fini. Lafforgue [L] VII 7 montre, en se réduisant au cas des courbes par un argument de sections planes, que l'assertion (i) de 0.6 reste vraie pour $\mathcal{F}_0$. Prendre garde que la référence à Hartshorne que Lafforgue donne pour l'irréductibilité de la restriction de $\mathcal{F}_0$ a une courbe X_0 section plane de Z_0 n'est pas adéquate: Hartshorne suppose Z_0 projective. Nous expliquerons en 1.5–1.9 comment corriger l'argument, en remplaçant la référence à Hartshorne par une référence à Jouanolou [J].

0.8. Soient $\mathcal{F}_0$ et Z_0 comme en 0.7. Utilisant une méthode développée par Wiesend [W] et le théorème de Lafforgue, Drinfeld [Dr] a montré, sous l'hypothèse additionnelle que Z_0 est lisse, que si $\mathcal{F}_0$ vérifie l'assertion (ii) du théorème alors $\mathcal{F}_0$ vérifie aussi (iii).

Notre but est de montrer que tout $\mathcal{F}_0$ comme en 0.7 vérifie (ii).

0.9. Passons en revue les sections du présent article. Dans la section 1, on considère les $\overline{\mathbb{Q}}_l$-faisceaux de Weil lisses semi-simples sur Z_0 normal absolument irréductible de type fini sur $\mathbb{F}_q$. On montre comment les décrire en terme de $\overline{\mathbb{Q}}_l$-faisceaux lisses sur des schémas $Z_0 \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^a}$, de déterminant d'ordre fini, et dont l'image inverse sur $Z = Z_0 \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}$ est irréductible. La décomposition (1.4.1) obtenue traduit (0.3), joint à des résultats bien connus sur la relation entre représentations irréductibles d'un groupe G et d'une extension de $\mathbb{Z}$ par G.

Dans la section 2, on considère un $\overline{\mathbb{Q}}_l$-faisceau de Weil lisse $\mathcal{F}_0$ sur une courbe X_0 lisse et absolument irréductible sur $\mathbb{F}_q$. Pour simplifier, on suppose X_0 affine. La “complexité” de X_0 sera mesurée par l'entier $b_1(X) := \dim H^1_c(X, \mathbb{Q}_l)$. On suppose $\mathcal{F}_0$ *algébrique*, i.e. que les traces $\mathrm{Tr}(F_x, \mathcal{F}_0)$, pour x dans un $X_0(\mathbb{F}_{q^n})$, sont des nombres algébriques. D'après 0.6 (ii) appliqué à des tordus de sous-quotients irréductibles de $\mathcal{F}_0$, on sait que ces traces engendrent une extension finie E de $\mathbb{Q}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$. Notre but est d'expliciter un entier N, dépendant d'une “complexité” de $(X, \mathcal{F})$ tel que E soit engendré par les $\mathrm{Tr}(F_x, \mathcal{F}_0)$ pour x dans un $X_0(\mathbb{F}_{q^n})$ avec $n \leq N$. Posons $\log_q^+(a) = \sup(0, \log_q(a))$. Si $\mathcal{F}$ est à ramification modérée, on obtient N de la forme

$$O(\log_q^+(b_1(X))) + O(1) \tag{0.9.1}$$

où les constantes implicites dans O dépendent du rang de $\mathcal{F}_0$. Pour $\mathcal{F}_0$ quelconque, il faut remplacer $b_1(X)$ par $b_1(X) + \sum_{s \in S} \alpha_s(\mathcal{F})$, où $\alpha_s(\mathcal{F})$ mesure la sauvagerie de la ramification de $\mathcal{F}$ en s.

Une autre façon de mesurer la sauvagerie de $\mathcal{F}$, beaucoup moins économe mais qui sera commode dans la section 3, est en terme d'un revêtement étale connexe X' de X sur lequel l'image inverse de $\mathcal{F}$ est à ramification modérée. On obtiendra un autre N, de la forme

$$O(\log_q^+(b_1(X')) + O(1). \tag{0.9.2}$$

Ici aussi, les constantes implicites dans O dépendent du rang de $\mathcal{F}_0$.

Les preuves font un usage essentiel de 0.6 (iii), pour ramener le problème posé au suivant. Pour $\mathcal{F}_0$ and $\mathcal{G}_0$ des faisceaux de Weil lisses semi-simples sur X_0, trouver N tel que si

$$\mathrm{Tr}(F_x, \mathcal{F}_0) = \mathrm{Tr}(F_x, \mathcal{G}_0)$$

pour tout x dans un $X(\mathbb{F}_{q^n})$ avec $n \leq N$, alors $\mathcal{F}_0$ et $\mathcal{G}_0$ sont isomorphes.

0.10. Le théorème principal est prouvé dans la section 3. Après quelques dévissages, on est amené à traiter le cas où $\mathcal{F}_0$ est un $\overline{\mathbb{Q}}_l$-faisceau lisse sur un schéma Z_0 qui est lisse et absolument irréductible sur $\mathbb{F}_q$, et où $\mathcal{F}_0$ est algébrique (algébraïcité des traces des Frobenius). Il s'agit de montrer que l'extension de $\mathbb{Q}$ engendrée par les traces des Frobenius est une extension finie. On le fait en montrant qu'il existe un entier N tel que pour tout entier $n > N$ et tout point $x \in Z_0(\mathbb{F}_{q^n})$, la trace $\mathrm{Tr}(F_x, \mathcal{F}_0)$ est contenue dans l'extension de $\mathbb{Q}$ engendrée par les $\mathrm{Tr}(F_{x'}, \mathcal{F}_0)$ avec x' dans un $Z_0(\mathbb{F}_{q^{n'}})$ et $n' < n$. Pour le prouver, on fait passer par x une courbe X_0 telle que $(X_0, \mathcal{F}_0|X_0)$ ne soit pas trop complexe, et on applique à cette courbe les résultats de la section 2. Plus précisément, on construit une courbe affine lisse X_0, un point $\tilde{x} \in X_0(\mathbb{F}_{q^n})$ et un $\mathbb{F}_q$-morphisme $\varphi\colon X_0 \to Z_0$ qui envoie $\tilde{x}$ sur x. La construction ne garantit pas que la courbe X_0 soit connexe. Remplaçons-la par sa composante connexe X_1 telle que $\tilde{x} \in X_1(\mathbb{F}_{q^n})$. La courbe X_1 pourrait ne pas être absolument irréductible sur $\mathbb{F}_q$, mais on dispose d'une borne D (ne dépendant que de Z_0) telle que X_1 soit absolument irréductible sur un $\mathbb{F}_{q^d}$ avec $d \leq D$. C'est à $X_1/\mathbb{F}_{q^d}$ qu'on appliquera les résultats de la section 2. Pour simplifier l'exposé de la stratégie, nous prétendons ici (à tort) X_0 absolument irréductible sur $\mathbb{F}_q$.

Choisissons un revêtement étale connexe Z' de Z sur lequel $\mathcal{F}$ devienne à ramification modérée. Ceci est un énorme gaspillage mais n'est fait qu'une seule fois. Soit X' une composante connexe de l'image inverse de Z' sur X. La complexité de $(X_0, \varphi^*\mathcal{F}_0)$ sera mesurée par $b_1(X')$. Nous la contrôlerons par le théorème de Katz [K]. Comme il ne s'agit ici que de courbes, on pourrait plutôt utiliser Bombieri [B], sur lequel se base Katz, et estimer le nombre de composantes connexes par le produit des degrés d'équations de X', mais ce ne serait que refaire dans un cas simple l'argument de Katz. On obtient une borne pour la complexité qui est polynômiale en n. Dès que n est assez grand, l'entier N de (0.9.2) vérifie $N < n$ et $\mathrm{Tr}(F_x, \mathcal{F}_0) = \mathrm{Tr}(F_{\tilde{x}}, \varphi^*\mathcal{F}_0)$ est dans l'extension de $\mathbb{Q}$ engendrée par les $\mathrm{Tr}(F_{x'}, \varphi^*\mathcal{F}_0) = \mathrm{Tr}(F_{\varphi(x')}, \mathcal{F}_0)$ pour $x' \in X_0(\mathbb{F}_{q^{n'}})$ et $n' \leq N < n$.

Je remercie H. Esnault d'une lecture attentive du texte et de ses suggestions qui m'ont permis, je l'espère, de le rendre plus lisible.

1. Irréductibilité et extensions du corps de base

1.1. Soient Z_0 un schéma normal absolument irréductible de type fini sur $\mathbb{F}_q$, $Z := Z_0 \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}$ et x un point géométrique de Z. Il définit un point géométrique, encore noté x, de Z_0. Le groupe fondamental de Z_0 est une extension

$$1 \to \pi_1(Z, x) \to \pi_1(Z_0, x) \to \mathrm{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{F}_q) \to 1$$

Prenant le produit fibré avec $W(\mathbb{F}/\mathbb{F}_q) = \mathbb{Z} \subset \mathrm{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{F}_q) = \widehat{\mathbb{Z}}$, on obtient le groupe de Weil $W(Z_0, x)$:

$$1 \to \pi_1(Z, x) \to W(Z_0, x) \to \mathbb{Z} \to 1.$$

Le foncteur "fibre en x" est une équivalence de la catégorie des $\overline{\mathbb{Q}}_l$-faisceaux de Weil lisses sur Z_0 avec celle des représentations linéaires continues de $W(Z_0, x)$ sur un $\overline{\mathbb{Q}}_l$-espace vectoriel de dimension finie.

1.2. Si V est une $\overline{\mathbb{Q}}_l$-représentation irréductible de $W(Z_0, x)$, sa restriction à $\pi_1(Z, x)$ est somme de représentations irréductibles non isomorphes de $\pi_1(Z, x)$, permutées entre elles transitivement par $W(Z_0, x)/\pi_1(Z_0, x) = \mathbb{Z}$.

Soient n le nombre de sommands, et $Z_1 := Z_0 \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^n}$; $W(Z_1, x)$ est l'image inverse dans $W(Z_0, x)$ de $n\mathbb{Z}$. Si S est l'un des sommands irréductibles de la restriction de V à $\pi_1(Z, x)$, S est une représentation de $W(Z_1, x)$ et V est l'induite $\mathrm{Ind}_{W(Z_1,x)}^{W(Z_0,x)}(S)$.

Si $\mathcal{V}$ (resp. $\mathcal{S}$) est le $\overline{\mathbb{Q}}_l$-faisceau de Weil correspondant à V (resp. S), $\mathcal{V}$ est l'image directe, par $Z_1 \to Z_0$, de $\mathcal{S}$.

1.3. Soit maintenant V une représentation semi-simple de $W(Z_0, x)$. Le quotient $\mathbb{Z}$ de $W(Z_0, x)$ permute les classes d'isomorphie de constituants simples de la restriction de V à $\pi_1(Z, x)$. Soit A l'ensemble des orbites, dans chaque orbite a choisissons un représentant S'_a, et soit $n(a)$ le nombre d'éléments de l'orbite. Si $Z_a = Z_0 \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^{n(a)}}$, la représentation S'_a se prolonge en une représentation S_a de $W(Z_a, x)$, et S_a est unique à torsion près par un caractère du quotient $\mathbb{Z}$ de $W(Z_a, x)$. Nous choisirons la torsion pour que le caractère $\det(S_a)$ de $W(Z_a, x)$ soit d'ordre fini.

Appliquons 1.2 aux constituants irréductibles de V, et regroupons les occurences de S_a. On obtient une décomposition

$$V = \bigoplus_a \mathrm{Ind}_{W(Z_a,x)}^{W(Z_0,x)}(S_a \otimes W_a) \tag{1.3.1}$$

pour W_a une représentation de $W(Z_a, x)$ triviale sur $\pi_1(Z, x)$. Cette description de V est unique, à cela près qu'on peut

a) tordre S_a par un caractère d'ordre fini de $\mathbb{Z} = W(Z_a, x)/\pi_1(Z, x)$, et W_a par le caractère inverse;

b) remplacer S_a par son conjugué $S_a^{(i)}$ par un élément i de $W(Z_0, x)/W(Z_a, x) = \mathbb{Z}/n(a)$.

1.4. Passons du langage des représentations de groupes à celui des faisceaux: S_a (resp. $S_a^{(i)}$) correspond à $\mathcal{S}_{a,1}$ (resp. $\mathcal{S}_{a,1}^{(i)}$) sur Z_a, W_a à $\mathcal{W}_a$ sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_{q^{n(a)}})$ et, si p_a est la projection de Z_a sur Z_0, et pr_a celle de Z_a sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_{q^{n(a)}})$, (1.3.1) devient une décomposition du $\overline{\mathbb{Q}}_l$-faisceau de Weil $\mathcal{V}$ correspondant à V:

$$\mathcal{V} = \bigoplus_{a\in A} p_{a*}\left(\mathcal{S}_a \otimes \mathrm{pr}_a^*\mathcal{W}_a\right). \tag{1.4.1}$$

Dans cette décomposition, les $\det(\mathcal{S}_a)$ sont d'ordre fini, et les images inverses $\mathcal{S}_a^{(i)}$ sur Z des $\mathcal{S}_{a,1}^{(i)}$ $(a \in A, i \in \mathbb{Z}/n(a))$ sont des $\overline{\mathbb{Q}}_l$-faisceaux irréductibles non isomorphes.

1.5. Soit $\mathcal{F}_0$ lisse irréductible de déterminant d'ordre fini sur Z_0 comme en 1.1. D'après 1.2, l'image inverse $\mathcal{F}$ de $\mathcal{F}_0$ sur $Z := Z_0 \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}$ est somme directe de faisceaux lisses irréductibles $\mathcal{S}^{(i)}$ non isomorphes, permutés transitivement par $Z = W(\mathbb{F}/\mathbb{F}_q)$. On note n le nombre des $\mathcal{S}^{(i)}$. Dans la fin de cette section, nous donnons une preuve de l'énoncé [L] VII 7 suivant de Lafforgue (cf 0.7)

Théorème 1.6 (Lafforgue)**.** *En tout point fermé x_0 de Z_0, les valeurs propres de F_{x_0} agissant sur $\mathcal{F}_0$ sont des nombres de Weil de poids* 0*.*

Si U_0 est un ouvert non vide de Z_0, la restriction de $\mathcal{F}_0$ à U_0 est encore irréductible. Recouvrant Z_0 par des ouverts affines, on se ramène à supposer, et on supposera, que Z_0 est affine.

Lemme 1.7. *Il existe un revêtement étale connexe galoisien Z' de Z tel que si l'image inverse Y' de Z' par un morphisme $f\colon Y \to Z$ est connexe, alors $\mathcal{F}$ et $f^*\mathcal{F}$ ont même monodromie.*

Fixons un point base a de Y, et notons encore a son image dans Z. On dispose d'un morphisme

$$\pi_1(Y, a) \to \pi_1(X, a)$$

et la conclusion "même monodromie" signifie que $\pi_1(Y, a)$ s'envoie sur l'image de $\pi_1(X, a)$ dans $\mathrm{GL}(\mathcal{F}_a)$. Elle implique que les $f^*\mathcal{S}^{(i)}$ restent lisses irréductibles non isomorphes.

Preuve de 1.7. Le groupe de monodromie M, image de $\pi_1(X, a)$ dans $\mathrm{GL}(\mathcal{F}_a)$, est un sous-groupe fermé d'un groupe $\mathrm{GL}(n, \mathcal{O}_\lambda)$, donc est un groupe de Lie l-adique compact. Il admet donc un pro-l sous-groupe invariant ouvert H, et l'intersection H' des noyaux des homomorphismes $H \to \mathbb{Z}/l$ est encore un sous-groupe invariant ouvert. On prend pour Z' le revêtement correspondant à H'. Supposons Y' connexe. Ceci équivaut à ce que $\pi_1(Y, a)$ s'envoie sur M/H'. Puisque tout sous-groupe fermé de H qui s'envoie sur H/H' coïncide avec H, $\pi_1(Y, a)$ s'envoie sur M.

1.8. Choisissons un plongement fermé de Z_0 dans un espace affine type $\mathbb{E}_0$ sur $\mathbb{F}_q$ et Z' comme en 1.7. Soit G_0 le $\mathbb{F}_q$-schéma qui paramétrise les sous-espace linéaires affine de codimension $\dim(Z_0) - 1$ dans $\mathbb{E}_0$. Etendons le corps de base de $\mathbb{F}_q$ à $\mathbb{F}$ et appliquons au morphisme composé $f\colon\ Z' \to Z \hookrightarrow \mathbb{E}$ le théorème de Bertini sous la forme que lui a donnée Jouanoulou [J] Th. 6.3 (iv) p. 67. On obtient l'existence d'un ouvert non vide U du schéma lisse irréductible $G = G_0 \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}$, tel que pour tout $u \in U(\mathbb{F})$, correspondant à un sous-espace linéaire affine L_u de $\mathbb{E}$, l'image inverse $f^{-1}(L_u)$ de Z' sur $Z \cap L_u$ soit irréductible. Noter que cette irréductibilité implique celle de $Z \cap L_u$. L'ensemble des u tel que $Z \cap L_u$ ne soit pas une courbe lisse est de dimension strictement plus petite que celle de U. On peut donc, quitte à rétrécir U, supposer que les $Z \cap L_u$ sont des courbes lisses. Quitte à rétrécir U davantage, on peut aussi supposer que U est de la forme $U_0 \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}$, pour U_0 un ouvert de G_0.

Le nombre de $\mathbb{F}_{q^m}$-points de U_0 est, pour $m \to \infty$, de la forme $q^{\dim(U)m}(1 + O(q^{-1/2}))$ (Lang-Weil ou la formule des traces plus la conjecture de Weil). Dès que m est assez grand, $U_0(\mathbb{F}_{q^m})$ est donc non vide. Ceci permet de choisir m premier à n tel que $U_0(\mathbb{F}_{q^m})$ soit non vide.

Pour que $\mathcal{F}_0$ sur Z_0 vérifie la conclusion de 1.6, il faut et il suffit que cette conclusion soit vérifiée par l'image inverse de $\mathcal{F}_0$ sur $Z_0 \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^m}$. Remplaçant $\mathbb{F}_q$ par $\mathbb{F}_{q^m}$, Z_0 par $Z_0 \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^m}$ et $\mathcal{F}_0$ par son image inverse, on est ramené à prouver 1.6 sous l'hypothèse additionnelle que U_0 contienne un $\mathbb{F}_q$-point u_0. La section plane $Z_0 \cap L_{u_0}$ de Z_0 est alors une courbe lisse absolument irréductible Y_0. Etendons le corps de base à $\mathbb{F}$. Puisque u_0 est dans U_0, 1.7 assure que les restrictions des $\mathcal{S}^{(i)}$ à Y sont irréductibles non isomorphes. Parce que m est premier à n, elles sont permutées par $W(\mathbb{F}/\mathbb{F}_q)$: la restriciton de $\mathcal{F}_0$ à Y_0 est irréductible. Appliquons-lui 0.6 (i): quelque soit le point fermé y_0 de $Y_0 \subset Z_0$, les valeurs propres de F_{y_0} agissant sur $\mathcal{F}_0$ sont des nombres de Weil de poids 0. On conclut par la

Proposition 1.9. *Soit $\mathcal{F}_0$ un $\overline{\mathbb{Q}}_l$-faisceau de Weil lisse sur un schéme connexe X_0 sur $\mathbb{F}_q$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *il existe un point fermé x_0 de X_0 tel que les valeurs propres de $\mathcal{F}_0$ agissant sur X_0 sont des nombres de Weil de poids 0;*

(ii) *même assertion en tous les points fermés de X_0.*

Preuve (pour X_0 une courbe lisse et connexe). Supposons que $\mathcal{F}_0$ vérifie (i). Tout sous-quotient irréductible $\mathcal{F}_0'$ vérifie encore (i), et il suffit de vérifier (ii) pour chaque $\mathcal{F}_0'$. Soit $\mathcal{F}_0''$ un tordu de $\mathcal{F}_0'$ dont le déterminant soit d'ordre fini. Par 0.6 (i), $\mathcal{F}_0''$ vérifie (ii). Testant en x_0, on voit que la torsion est par un nombre de Weil de poids 0, et la validité de (ii) est invariante par une telle torsion.

Preuve (cas général). Quels que soit le point fermé x_0' de X_0, il existe une suite de courbes lisses et connexes Y_0^j et de morphismes $f^j\colon\ Y_0^j \to X_0$ $(1 \leq j \leq N)$ telle que x_0 soit dans l'image de Y_0^1, x_0' dans celle de Y_0^N, et que l'intersection des images de Y_0^j et Y_0^{j+1} $(1 \leq j < N)$ soit non vide. Si (i) est vérifie en x_0, la première partie de la preuve montre que (ii) est vérifié pour l'image inverse de $\mathcal{F}_0$ sur Y_0^1, donc que (i) est vérifié en tout point fermé de X_0 dans l'image de Y_0. De même, si (i) est vérifié en les points fermés dans $f(Y_j)$, donc en au moins un point fermé de $f(Y_{j+1})$, (i) est vérifié en les points fermés dans $f(Y_{j+1})$, et on atteint finalement x_0'.

2. Le cas des courbes: version quantitative

2.1. Soient X une courbe lisse et connexe sur un corps algébriquement clos de caractéristique p, $\bar{X}$ la complétée projective et lisse de X et S l'ensemble des points à l'infini: $X = \bar{X} - S$. Soit $\mathcal{F}$ un $\overline{\mathbb{Q}}_l$-faisceau lisse de rang r sur X. Posons

$$\chi_c(X, \mathcal{F}) := \sum (-1)^i \dim\ H_c^i(X, \mathcal{F}).$$

Cette caractéristique d'Euler-Poincaré est donnée par la formule de Grothendieck-Ogg-Shafarevich

$$\chi_c(X, \mathcal{F}) = r\chi_c(X) - \sum_{s \in S} \mathrm{Sw}_s(\mathcal{F}). \tag{2.1.1}$$

Si la courbe $\bar{X}$ est de genre g, on a

$$\chi_c(X) = 2 - 2g - |S|. \tag{2.1.2}$$

Le terme $\mathrm{Sw}_s(\mathcal{F})$ est le *conducteur de Swan* de $\mathcal{F}$ en s.

Soit K_s le corps des fractions de l'hensélisé de X en s. Le lecteur qui le préfère peut remplacer "hensélisé" par "complété". Cela ne change pas $\mathrm{Gal}(\overline{K}_s/K_s)$, pour $\overline{K}_s$ une clôture algébrique de K_s. Les $\overline{\mathbb{Q}}_l$-faisceaux sur $\mathrm{Spec}(K_s)$ s'identifient aux représentations continues $\overline{\mathbb{Q}}_l$-linéaires V de $\mathrm{Gal}(\overline{K}_s/K_s)$. Le conducteur $\mathrm{Sw}_s(\mathcal{F})$ est le conducteur de Swan $\mathrm{Sw}(V)$ de la représentation linéaire V de $\mathrm{Gal}(\overline{K}_s/K_s)$ correspondant à l'image inverse de $\mathcal{F}$ sur $\mathrm{Spec}(K_s)$.

Le conducteur $\mathrm{Sw}(V)$ est additif en V (pour les suites exactes courtes). Notons $\mathrm{Gal}(\overline{K}_s/K_s)^\beta$ les sous-groupes de ramification de $\mathrm{Gal}(\overline{K}_s/K_s)$, en numérotation supérieure. Définissons $\alpha(V)$ comme étant la borne inférieure des $\beta > 0$ tels que $\mathrm{Gal}(\overline{K}_s/K_s)^\beta$ agisse trivialement sur V. Si la représentation V est irréductible, on a

$$\mathrm{Sw}(V) = \dim(V).\alpha(V) \qquad (V \text{ irréductible}) \tag{2.1.3}$$

(une conséquence de Serre [S] 19.1 et de la définition des fonctions de Herbrand reliant la numérotation inférieure à la numérotation supérieure). Si V provient de $\mathcal{F}$ sur X, on posera $\alpha_s(\mathcal{F}) := \alpha(V)$.

Il résulte de (2.1.3) par additivité que

$$\mathrm{Sw}(V) \leq \dim(V).\alpha(V). \tag{2.1.4}$$

Soit P le pro-p-sous-groupe de Sylow de $\mathrm{Gal}(\overline{K}_s/K_s)$. Puisque V est l-adique, il agit sur V à travers un quotient fini $\bar{P}$. Tant $\mathrm{Sw}(V)$ que $\alpha(V)$ s'annulent si et seulement V est modérée, i.e. si P agit trivialement. Sinon, $\alpha(V)$ est le plus grand nombre (rationnel) tel que $\bar{P}^{\alpha(V)}$ soit non trivial. L'importance pour nous de l'invariant $\alpha(V)$ provient de l'observation que

$$\alpha(V \otimes W) \leq \sup(\alpha(V), \alpha(W)). \tag{2.1.5}$$

La dualité de Poincaré met en dualité parfaite $H^2_c(X, \mathcal{F})$ et $H^0(X, \mathcal{F}^\vee(1))$. En particulier, $H^2_c(X, \mathcal{F})$ est de rang au plus r et de rang r si $\mathcal{F}$ est constant. Si la courbe X est affine, on a $H^0_c(X,\mathcal{F})=0$, et (2.1.1), (2.1.4) donnent

$$\text{(2.1.6)} \qquad \dim\, H^1_c(X,\mathcal{F}) \leq r(b_1(X)+\sum \alpha_s(\mathcal{F})) \qquad (X \text{ affine}),$$

où on a posé

$$\text{(2.1.7)} \qquad b_1(X)=\dim\, H^1_c(X,\overline{\mathbb{Q}}_l)=2g+|S|-1 \qquad (X \text{ affine}).$$

2.2. Soient $X_0=\bar{X}_0-S_0$ une courbe sur $\mathbb{F}_q$ comme en 0.0, et $\mathcal{F}_0$ un $\overline{\mathbb{Q}}_l$-faisceau de Weil lisse de rang r sur X_0. On suppose $\mathcal{F}_0$ algébrique (0.9). On ne suppose pas $\mathcal{F}_0$ irréductible. Soit E une extension galoisienne de $\mathbb{Q}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$ contenant les $\mathrm{Tr}(F_x,\mathcal{F}_0)$ pour x dans un quelconque $X_0(\mathbb{F}_{q^n})$, $n\geq 1$. D'après 0.6, pour tout $\sigma\in \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$, il existe un $\overline{\mathbb{Q}}_l$-faisceau de Weil lisse semi-simple $\sigma(\mathcal{F}_0)$ tel que pour tout x dans un $X_0(\mathbb{F}_{q^n})$, on ait

$$\mathrm{Tr}(F_x,\sigma(\mathcal{F}_0))=\sigma(\mathrm{Tr}(F_x,\mathcal{F}_0)).$$

On notera $\sigma(\mathcal{F})$ l'image inverse de $\sigma(\mathcal{F}_0)$ sur X. Cette notation est raisonable, car $\sigma(\mathcal{F})$, qui est défini à isomorphisme près, ne dépend que $\mathcal{F}$ (résulte de 1.4.1 et d'une compatibilité entre "σ" et torsion). Pour chaque $s\in S$, on a

$$\text{(2.2.1)} \qquad \mathrm{Sw}_s(\sigma\mathcal{F})=\mathrm{Sw}_s(\mathcal{F}),\quad \alpha_s(\sigma\mathcal{F})=\alpha_s(\mathcal{F}).$$

Esquisse de preuve: on peut supposer $\mathcal{F}_0$ irréductible. Si $\mathcal{F}_0$ correspond à une représentation automorphe π (par la correspondance rationalisée), π est définie sur E et $\sigma\mathcal{F}_0$ correspond à $\sigma\pi$. En chaque $s\in S_0$, $\mathcal{F}_0$ définit une représentation du groupe de Weil local. Par la correspondance locale, sa Frobenius-semi-simplifiée ([De1] 8.6) correspond à la composante locale π_s de π. Noter que les classes d'isomorphie de $\overline{\mathbb{Q}}_l$-représentations linéaires continues F-semi-simples du groupe de Weil local sont en correspondance bijective avec les classes d'isomorphie de $\overline{\mathbb{Q}}_l$-représentations linéaires F-semi-simple (loc. cit.) du groupe de Weil-Deligne. Ces dernières sont des objets purement algébriques. Si π_s est définie sur E, la représentation correspondante le sera aussi, et conjuguer par σ est compatible à la correspondance (rationalisée). En particulier, $\mathcal{F}_0$ et $\sigma(\mathcal{F}_0)$ donnent lieu à des représentations du groupe d'inertie sauvage en s ayant le même noyau, et on se réduit à (2.1.3).

Pour notre résultat principal, le lemme plus élémentaire suivant suffit.

Lemme 2.3. *Si $\mathcal{F}$ est modérément ramifié, $\sigma(\mathcal{F})$ l'est aussi.*

Preuve. L'image par σ de la fonction L de $\mathcal{F}_0$:

$$L(X_0, \mathcal{F}_0, t) = \prod_{x \in |X_0|} \det(1 - F_{x_0} t^{\deg(x_0)}, \mathcal{F}_0)^{-1}$$

est la fonction L de $\sigma(\mathcal{F}_0)$. Cette fonction L est une fonction rationnelle, et d'après l'interprétation cohomologique de Grothendieck des fonctions L l'ordre de son pôle en $t = \infty$ est $-\chi_c(\mathcal{F})$. On a donc $\chi_c(\mathcal{F}) = \chi_c(\sigma\mathcal{F})$. Puisque $\mathcal{F}$ est à ramification modérée, les $\mathrm{Sw}_s(\mathcal{F})$ sont nuls. Comparant (2.1.1) pour $\mathcal{F}$ et $\sigma\mathcal{F}$, on voit que la somme des $\mathrm{Sw}_s(\sigma\mathcal{F})$, et donc chacun d'eux, est nul, i.e. que $\sigma(\mathcal{F})$ est à ramification modérée.

2.4. Supposons X_0 affine, et soient $\mathcal{F}_0, \mathcal{G}_0$ deux faisceaux de Weil lisses semi-simples de rang r sur X_0. Notons $\log_q^+$ la fonction $\sup(0, \log_q)$ et $[\quad]$ la fonction "partie entière". Posons

$$\alpha_s(\mathcal{F}, \mathcal{G}) := \alpha_s(\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}) = \sup(\alpha_s(\mathcal{F}), \alpha_s(\mathcal{G})) \tag{2.4.1}$$

$$N_0 = 2 \log_q^+ \Big(2r^2 \Big(b_1(X) + \sum_{s \in S} \alpha_s(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \Big) \Big) \tag{2.4.2}$$

$$N = [N_0] + 2r \tag{2.4.3}$$

Proposition 2.5. *Si pour tout entier $n \leq N$ et tout $x \in X(\mathbb{F}_{q^n})$ on a*

$$\mathrm{Tr}(F_x, \mathcal{F}_0) = \mathrm{Tr}(F_x, \mathcal{G}_0),$$

alors $\mathcal{F}_0$ est isomorphe à $\mathcal{G}_0$.

Preuve. Appliquons (1.3) (1.4) à $\mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{G}_0$. On obtient des décompositions (1.4.1)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0 &= \bigoplus_{a \in A} p_{a*}(\mathcal{S}_{a,1} \otimes \mathrm{pr}_a^* \mathcal{W}_a) \\ \mathcal{G}_0 &= \bigoplus_{a \in A} p_{a*}(\mathcal{S}_{a,1} \otimes \mathrm{pr}_a^* \mathcal{W}'_a). \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

Dans (2.5.1), à chaque $a \in A$ est attaché un entier $n(a) \geq 1$, $\mathcal{S}_{a,1}$ est un $\overline{\mathbb{Q}}_l$-faisceau de Weil lisse sur $X_a := X_0 \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^{n(a)}}$, $\mathcal{W}_a$ et $\mathcal{W}'_a$ sont des $\overline{\mathbb{Q}}_l$-faisceaux de Weil sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_{q^{n(a)}})$, et p_a et pr_a sont les projections de X_a sur X_0 et sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_{q^{n(a)}})$. Notons $\mathcal{S}_{a,1}^{(i)}$, l'image de $\mathcal{S}_{a,1}$, par la puissance $i^{\text{ème}}$ du Frobenius $F \in \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{q^{n(a)}}/\mathbb{F}_q)$, et omettons l'indice 1 pour indiquer l'image inverse de X_a à X. D'après (1.4), les $\mathcal{S}_{a,1}$, $\mathcal{W}_a$ et $\mathcal{W}'_a$ dans (2.5.1) vérifient

(i) $\det(\mathcal{S}_{a,1})$ est d'ordre fini;

(ii) les $\mathcal{S}_a^{(i)}$ ($a \in A$, $i \in \mathbb{Z}/n(a)$) sont des $\overline{\mathbb{Q}}_l$-faisceaux lisses irréductibles sur X, deux à deux non isomorphes;

(iii) Pour chaque a, $\mathcal{W}_a$ ou $\mathcal{W}'_a$ est non nul.

Puisque $\mathcal{S}_a^{(i)}$ est un facteur direct de $\mathcal{F}$ ou de $\mathcal{G}$, on a en tout point $s \in S$

$$\alpha_s(\mathcal{S}_a^{(i)}) \leq \sup(\alpha_s(\mathcal{F}), \alpha_s(\mathcal{G})).$$

Notons $A(n)$ l'ensemble des a dans A tels que $n(a)|n$.

Lemme 2.6. *Si $n > N_0$ (2.4.2), les fonctions sur $X_0(\mathbb{F}_{q^n})$*

$$t_{a,i}\colon\ x \longmapsto \mathrm{Tr}(F_x, \mathcal{S}_{a,1}^{(i)}) \qquad\qquad (a \in A(n), i \in \mathbb{Z}/n(a))$$

sont linéairement indépendantes.

Preuve. Les fonctions $t_{a,i}$ sont à valeurs dans un corps de nombres $E \subset \overline{\mathbb{Q}}_l$. Plongeons E dans $\mathbb{C}$ pour les traiter comme des fonctions à valeurs complexes. L'idée de la preuve est de montrer qu'elles sont presque orthogonales, dans $L^2(X_0(\mathbb{F}_{q^n}))$.

D'après 0.6 (i) $\mathcal{S}_{a,1}^{(i)}$ est pur de poids 0. La fonction complexe conjuguée de $t_{a,i}$ est donc $x \mapsto \mathrm{Tr}(F_x, \mathcal{S}_{a,1}^{(i)\vee})$, et le produit scalaire $\langle t_{b,j}, t_{a,i}\rangle = \sum t_{a,i}(x)^{-} t_{b,j}(x)$ est

$$\langle t_{b,j}, t_{a,i}\rangle = \sum \mathrm{Tr}(F_x, \mathcal{H}om(\mathcal{S}_{a1}^{(i)}, \mathcal{S}_{b1}^{(j)})).$$

Par la formule des traces, cette somme est la trace du Frobenius $F \in W(\mathbb{F}/\mathbb{F}_{q^n})$

$$\langle t_{b,j}, t_{a,i}\rangle = \sum(-1)^k \mathrm{Tr}(F, H_c^k(X, \mathcal{H}om(\mathcal{S}_a^{(i)}, \mathcal{S}_b^{(j)})).$$

Puisque X est affine, H_c^0 est nul. Le terme "dominant" est donné par H_c^2: il vaut q^n si $(a, i) = (b, j)$ et est nul sinon. La presque orthogonalité promise vient de ce que le terme $k = 1$ est en $O(q^{n/2})$ pour n grand. Plus précisément, puisque $\mathcal{H}om(\mathcal{S}_{a1}^{(i)}, \mathcal{S}_{b1}^{(j)})$ est pur de poids 0, les valeurs propres de F sur son H_c^1 sont de valeur absolue $q^{n/2}$ ou 1, et le terme $k = 1$ est borné en valeurs absolue par $q^{n/2}$ fois

$$\dim H_c^1 \leq \dim \mathcal{S}_b^{(j)}.\dim \mathcal{S}_a^{(i)}.(b_1(X) + \sum \alpha_s(\mathcal{F}, \mathcal{G})).$$

Supposons qu'il existe une relation de dépendance linéaire $\sum \lambda_{b,j} t_{b,j} = 0$. Soit a, i tel que $|\lambda_{a,i}|$ soit maximal parmi les $|\lambda_{b,j}|$. Divisant par $\lambda_{a,i}$, on peut supposer que $\lambda_{a,i} = 1$ et que $|\lambda_{b,j}| \leq 1$ pour $b \in A(n)$ et $j \in \mathbb{Z}/n(b)$. On a alors

$$\begin{aligned} 0 = \langle \sum \lambda_{b,j} t_{b,j}, t_{a,i}\rangle &= \sum_{b,j} \lambda_{b,j}\, (t_{b,j}, t_{a,i}) \\ &= q^n + \text{ reste} \end{aligned}$$

où la valeur absolue du reste est majorée par

$$\sum_{b,j} |\lambda_{b,j}| \mathrm{Tr}(F, H^1_c(X, \mathcal{H}om(\mathcal{S}_a^{(i)}, \mathcal{S}_b^{(j)}))$$
$$\leq q^{n/b}.2r^2 \left(b_1(X) + \sum \alpha_s(\mathcal{F}, \mathcal{G})\right)$$

L'hypothèse sur n assure que $|\text{reste}| < q^n$: contradiction.

Corollaire 2.7. *Notons F le Frobenius de $W(\mathbb{F}/\mathbb{F}_{q^n})$. Si $n > N_0$ et que* $\mathrm{Tr}(F_x, \mathcal{F}_0) = \mathrm{Tr}(F_x, \mathcal{G}_0)$ *pour $x \in X_0(\mathbb{F}_{q^n})$, alors*

$$\mathrm{Tr}(F, \mathcal{W}_a) = \mathrm{Tr}(F, \mathcal{W}'_a)$$

pour chaque $a \in A(n)$.

Preuve. Les décomposition (2.5.1) fournissent l'identité entre fonctions traces

$$\sum t_{a,i} \mathrm{Tr}(F, \mathcal{W}_a) = \sum t_{a,i} \mathrm{Tr}(F, \mathcal{W}'_a)$$

et on applique 2.6.

2.8. Fin de la preuve de 2.5**.** Il faut montrer que pour chaque a, et pour F le Frobenius géométrique générateur de $W(\mathbb{F}/\mathbb{F}_{q^{n(a)}})$, F a même multi-ensemble de valeurs propres sur $\mathcal{W}_a$ et $\mathcal{W}'_a$. D'après 2.7, si n est divisible par $n(a)$ et que

$$[N_0] + 1 \leq n \leq N = [N_0] + 2r,$$

on a

$$\mathrm{Tr}(F^{n/n(a)}, \mathcal{W}_a) = \mathrm{Tr}(F^{n/n(a)}, \mathcal{W}'_a)$$

Il y a au moins $[2r/a]$ telles valeurs de n, $\mathcal{W}_a$ et $\mathcal{W}'_a$ sont de dimension au plus $[r/a]$ et il reste à appliquer le lemme suivant

Lemme 2.9. *Soient α_i k nombres non nuls distincts. Si les λ_i vérifient, pour m convenable,*

$$\sum \lambda_i \alpha_i^r = 0 \qquad \textit{pour} \qquad m \leq r < m + k, \tag{2.9.1}$$

les λ_i sont tous nuls.

Preuve. (2.9.1) peut se récrire

$$\sum (\lambda_i \alpha_i^m).\alpha_i^s = 0 \qquad \text{pour } 0 \leq s < k$$

et le déterminant de Vandermonde $\det(\alpha_i^s)$ est non nul.

Dans la proposition qui suit, X_0 est supposée affine, et $\mathcal{F}_0$ est un faisceau de Weil lisse de rang r sur X_0. On suppose que $\mathcal{F}_0$ est algébrique au sens de 0.9. Posons

$$\begin{aligned} N_0 &= 2\log_q^+\left(2r^2\left(b^1(X)+\sum\alpha_s(\mathcal{F})\right)\right), \\ N &= [N_0]+2r. \end{aligned}$$

Proposition 2.10. *Soit E_0 l'extension de $\mathbb{Q}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$ engendrée par les* $\mathrm{Tr}(F_x,\mathcal{F}_0)$ *pour x dans un $X_0(\mathbb{F}_{q^n})$ avec $n \leq N$. Alors, pour tout n et tout $x\in X_0(\mathbb{F}_{q^n})$,* $\mathrm{Tr}(F_x,\mathcal{F}_0)$ *est dans E_0.*

Preuve. Semi-simplifiant $\mathcal{F}_0$, on se ramène à supposer $\mathcal{F}_0$ semi-simple. Soit E comme en 2.2 une extension galoisienne assez grande de $\mathbb{Q}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$. Il nous faut montrer que pour $\sigma\in\mathrm{Gal}(E/E_0)$, les $\mathrm{Tr}(F_x,\mathcal{F}_0)$ sont fixes par σ. Ceci équivaut à

$$\mathrm{Tr}(F_x,\mathcal{F}_0)=\mathrm{Tr}(F_x,\sigma(\mathcal{F}_0)). \tag{2.10.1}$$

Par hypothèse, (2.10.1), est vrai si x est dans un $X(\mathbb{F}_{q^n})$ avec $n\leq N$. D'après 2.5 et le fait que $\alpha_s(\mathcal{F}_0)=\alpha_s(\sigma(\mathcal{F}_0))$, $\mathcal{F}_0$ est isomorphe $\sigma(\mathcal{F}_0)$. L'assertion en résulte.

2.11. Variantes**.** Gardons les hypothèses et notations de 2.5. Soit $q\colon X'\to X$ un revêtement étale connexe de X sur lequel les images inverses de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ soient à ramification modérée. Pour tout $\overline{\mathbb{Q}}_l$-faisceau $\mathcal{H}$ sur X, dont l'image inverse sur X' est à ramification modérée, le morphisme

$$q\colon H^*(X,\mathcal{H})\to H^*(X',q^*\mathcal{H})$$

est injectif, car son composé avec Tr_q est la multiplication par le degré du revêtement. On a donc

$$\dim H^1_c(X,\mathcal{H})\leq \dim H^1_c(X',\mathcal{H})\leq \mathrm{rang}(\mathcal{H}).b_1(X').$$

Si on repète les arguments prouvant 2.5 en utilisant cette estimation plutôt que (2.1.6), on obtient:

Variante 2.12. *Posons $N_0' := 2\log_q^+(2r^2b_1(X'))$ et $N' := [N_0']+2r$. Si pour tout entier $n\leq N'$ et tout $x\in X_0(\mathbb{F}_{q^n})$, on a*

$$\mathrm{Tr}(F_x,\mathcal{F}_0)=\mathrm{Tr}(F_x,\mathcal{G}_0),$$

alors $\mathcal{F}_0$ *est isomorphe à* $\mathcal{G}_0$.

De même si $\mathcal{F}_0$ est comme en 2.10, et que son image inverse par $q\colon X' \to X$ est à ramification modérée, $\sigma(\mathcal{F}_0)$ a la même propriété: après une extension finie du corps de base $\mathbb{F}_q$, on peut suppose que $q\colon X' \to X$ provienne de $q_0\colon X'_0 \to X_0$ et on applique 2.3. Répétant de même les arguments qui prouvent 2.10, on obtient la

Variante 2.13. *Soit* E_0 *l'extension de* $\mathbb{Q}$ *dans* $\overline{\mathbb{Q}}_l$ *engendrée par les* $\mathrm{Tr}(F_x, \mathcal{F}_0)$ *pour* x *dans un* $X_0(\mathbb{F}_{q^n})$ *avec* $n \leq N'$, N' *étant comme en 2.12. Alors, pour tout* n *et tout* $x \in X_0(\mathbb{F}_{q^n})$, $\mathrm{Tr}(F_x, \mathcal{F}_0)$ *est dans* E_0.

Remarque 2.14. L'hypothèse que $\mathcal{F}_0$ est algébrique assure que E_0 est une extension finie de $\mathbb{Q}$. Elle n'est pas requise pour prouver 2.13. Si $E_0 \subset E$ sont des extension de $\mathbb{Q}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$, si $\sum$ est l'ensemble des $\sigma\colon E \to \overline{\mathbb{Q}}_l$, qui prolongent l'inclusion de E_0 dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$, alors

$$E_0 = \{e \in E \mid \sigma(e) = e \text{ pour tout } \sigma \in \Sigma\},$$

et cette observation peut se substituer à l'argument galoisien.

3. Théorème principal.

Théorème 3.1. *Soit* Z_0 *un schéma de type fini sur* $\mathbb{F}_q$. *Si* $\mathcal{F}_0$ *est un* $\overline{\mathbb{Q}}_l$*-faisceau de Weil algébrique (0.9) sur* Z_0, *il existe une extension finie* $E \subset \overline{\mathbb{Q}}_l$ *de* $\mathbb{Q}$ *telle que pour tout* n *et tout* $x \in Z_0(\mathbb{F}_{q^n})$, $\mathrm{Tr}(F_x, \mathcal{F}_0)$ *soit dans* E.

Que ces traces soient toutes dans E revient à ce qu'en tout point fermé x_0 de Z_0 le facteur local de la fonction L de $\mathcal{F}_0$ soit à coefficients dans E (voir 0.5).

Lemme 3.2. *Le théorème* 3.1 *est impliqué par son cas particulier où on suppose que*

(i) Z_0 *est affine, lisse, irréductible, et est muni d'un morphisme étale* $\varphi\colon Z_0 \to \mathbb{E}_0^k$ *vers un espace affine sur* $\mathbb{F}_q$;

(ii) $\mathcal{F}_0$ *est lisse, irréductible et* $\det(\mathcal{F}_0)$ *est d'ordre fini.*

Preuve. Le schéma Z_0 de 3.1 admet une partition en parties localement fermées irréductibles F_i vérifiant (i) et telles que $\mathcal{F}_0|F_i$ soit lisse. Il suffit de traiter séparément chaque $(F_i, \mathcal{F}_0|F_i)$. On peut ensuite traiter séparément chaque sous-quotient irréductible de $\mathcal{F}_0|F_i$, et le tordre pour qu'il vérifie (ii).

Lemme 3.3. *Il existe un revêtement étale connexe $q\colon Z' \to Z$ tel que le groupe de monodromie de $q^*\mathcal{F}$ soit un pro-l-groupe.*

Ce qui nous importe est que la restriction de $q^*\mathcal{F}$ à une courbe tracée sur Z' soit modérément ramifiée à l'infini.

Preuve. Il existe une extension finie E_λ de $\mathbb{Q}_l$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$, d'anneau d'entiers $\mathcal{O}_\lambda$, et un $\mathcal{O}_\lambda$-faisceau lisse sans torsion $\widetilde{\mathcal{F}}$ tels que $\mathcal{F}$ soit isomorphe à $\widetilde{\mathcal{F}} \otimes_{\mathcal{O}_\lambda} \overline{\mathbb{Q}}_l$. La réduction de $\widetilde{\mathcal{F}}$ modulo l'idéal maximal m_λ de $\mathcal{O}_\lambda$ est un faisceau étale localement constant, et il suffit de prendre pour Z' un revêtement de Z sur lequel il devienne constant. Si $\mathcal{F}$ est de rang r, on peut prendre pour Z' une composante connexe du revêtement *Isom* $(\widetilde{\mathcal{F}}/m_\lambda\widetilde{\mathcal{F}}, (\mathcal{O}_\lambda/m_\lambda)^r)$. Sur le revêtement Z', la monodromie de chaque $\widetilde{\mathcal{F}}/m_\lambda^n\widetilde{\mathcal{F}}$ est un l-groupe.

Proposition 3.4. *Si l'entier n est suffisamment grand, pour tout $x \in Z_0(\mathbb{F}_{q^n})$, la trace $\mathrm{Tr}(F_x, \mathcal{F}_0)$ est contenue dans l'extension de $\mathbb{Q}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$ engendrée par les traces $\mathrm{Tr}(F_y, \mathcal{F}_0)$ avec $y \in Z_0(\mathbb{F}_{q^m})$ et $m < n$.*

Si N est tel que les entier $n > N$ soient "suffisamment grands", on en déduit par récurrence que toute trace $\mathrm{Tr}(F_x, \mathcal{F}_0)$ est contenue dans l'extension de $\mathbb{Q}$ engendrée par les $\mathrm{Tr}(F_y, \mathcal{F}_0)$ avec y dans un $Z_0(\mathbb{F}_{q^m})$ avec $m \leq N$. Cette extension est finie et 3.4 implique donc 3.1.

Soit $x \in Z_0(\mathbb{F}_{q^n})$ et essayons de prouver la conclusion de 3.4 pour x. On y arrivera pour n assez grand.

Choisissons un générateur de $\mathbb{F}_{q^n}$ sur $\mathbb{F}_q$. Ce choix définit un $\mathbb{F}_{q^n}$-point x' de la droite affine $\mathbb{E}_0^1$ sur $\mathbb{F}_q$, dont les $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q)$-conjugués sont tous distincts.

Lemme 3.5. *Si y est un $\mathbb{F}_{q^n}$-point de $\mathbb{E}_0^1$, il existe un $\mathbb{F}_q$-morphisme $P\colon \mathbb{E}_0^1 \to \mathbb{E}_0^1$, i.e. un polynôme $P \in \mathbb{F}_q[T]$, qui envoie x' sur y et soit de degré $\leq n-1$.*

Preuve. Les $\sigma x'$, pour $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q)$, sont n points distincts de la droite affine. Il existe donc un unique polynôme $P \in \mathbb{F}_{q^n}[T]$, de degré $\leq n-1$, qui pour chaque σ prenne en $\sigma x'$ la valeur σy. Son unicité assure son invariance par Galois, donc qu'il est dans $\mathbb{F}_q[T]$.

Corollaire 3.6. *Il existe un $\mathbb{F}_q$-morphisme $P\colon \mathbb{E}_0^1 \to \mathbb{E}_0^k$, de coordonnées des polynômes de degré $\leq n-1$, qui envoie $x' \in \mathbb{E}_0^1(\mathbb{F}_{q^n})$ sur $\varphi(x) \in \mathbb{E}_0^k(\mathbb{F}_{q^n})$.*

Se vérifie en appliquant 3.5 à chaque coordonnée de $\varphi(x)$.

3.7. Fixons P comme en 3.6. Soit X_0'' le produit fibré de Z_0 et $\mathbb{E}_0^1$ sur $\mathbb{E}_0^k$. Puisque $\varphi(x) = P(x')$, il existe $\bar{x} \in X_0''(\mathbb{F}_{q^n})$ s'envoyant sur x et x'. On note X_0 la composante connexe de X_0'' contenant $\bar{x}$:

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\tilde{P}"'] & X_0'' \arrow[r, "\varphi''"] \arrow[d] & \mathbb{E}_0^1 \arrow[d, "P"] \\ & Z_0 \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{E}_0^k \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{ccc} \bar{x} & \in & X_0(F_{q^n}) \\ \downarrow & & \\ x & \in & Z_0(\mathbb{F}_{q^n}) \end{array} \quad . \tag{3.7.1}$$

Le morphisme φ'' est étale, de degré au-dessus du point générique de $\mathbb{E}_0^1$ au plus égal au degré D de φ. Soit k_0 le corps des constantes de la courbe X_0 sur $\mathbb{F}_q$. Le degré d de k_0 sur $\mathbb{F}_q$ et $\leq D$, car X_0 est de degré $\leq D$ sur $\mathbb{E}_0^1$, et d divise n, car X_0 a un point sur $\mathbb{F}_{q^n}$. Etendons le corps de base de $\mathbb{F}_q$ à $\mathbb{F}_{q^d}$, et soit X_1 (resp. Z_1) la composante connexe de $X_0 \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^d}$ (resp. de $Z_0 \otimes_{\mathbb{F}_a} \mathbb{F}_{q^d}$) qui contient $\bar{x}$ (resp. x):

$$\begin{tikzcd} \bar{x} : \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_{q^n}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & X_1 \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & X_0 \arrow[d, "\tilde{P}"] \\ x : \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_{q^n}) \arrow[r] & Z_1 \arrow[r] \arrow[d] & Z_0 \arrow[d] \\ & \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_{q^d}) \arrow[r] & \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q) \end{tikzcd} \quad . \tag{3.7.2}$$

La courbes X_1 sur $\mathbb{F}_{q^d}$ est lisse et absolument irréductible. Etendons enfin le corps de base de $\mathbb{F}_{q^d}$ à $\mathbb{F}$, pour obtenir X et Z, et soit X' une composante connexe de l'image inverse X'' du revêtement étale Z' de Z:

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, hook] & X'' \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ & Z' \arrow[r] & Z \end{tikzcd} \quad . \tag{3.7.3}$$

3.8 Preuve de 3.4. L'image inverse de $\mathcal{F}$ sur X' est modérement ramifiée. Nous nous proposons d'appliquer 2.13 à la courbe X_1 sur $\mathbb{F}_{q^d}$, à $X' \to X$ et à l'image inverse $\mathcal{F}_1$ de $\mathcal{F}_0$ sur X_1. Estimons $b_1(X')$.

Le $\mathbb{F}$-morphisme composé

$$Z' \to Z \xrightarrow{\varphi} \mathbb{E}^k$$

est affine. Il se factorise donc par un plongement fermé $Z' \hookrightarrow \mathbb{E}^{k+k'}$, et il existe une famille de A' équations de degré $\leq b$ définissant Z' dans $\mathbb{E}^{k+k'}$.

Le graphe Γ_P de $P\colon\ \mathbb{E}^1 \to \mathbb{E}^k$ est défini dans $\mathbb{E}^{1+k}$ par k équations de degré $\leq n-1$.

Le produit fibré, calculé sur $\mathbb{F}$, de $Z' \to \mathbb{E}^k$ et $P\colon\ \mathbb{E}^1 \to \mathbb{E}^k$ est l'intersection, dans $\mathbb{E}^{1+k+k'}$, des images inverses de $Z' \subset \mathbb{E}^{k+k'}$ et de $\Gamma_P \subset \mathbb{E}^{1+k}$. Il est donc défini, dans $\mathbb{E}^{1+k+k'}$, par $A := A' + k$ équations de degré $\leq \sup(B, n-1)$. D'après Katz [K] ceci implique une majoration de la somme des nombres de Betti de ce produit fibré, et a fortiori de $b^1(X')$, puisque X' est une composante connexe du produit fibré.

Pour $n > B$, on a A équations de degré $\leq n-1$ dans un espace affine à $k+k'+1$ dimensions, et Katz donne

$$b_1(X') \leq 6.2^A(An+3)^{k+k'+1}. \tag{3.8.1}$$

Posons comme en 2.12

$$\begin{aligned} N'_0 &= 2\ \log^+_{q^d}(2r^2 b_1(X')) \qquad\qquad \text{et} \\ N' &= [N'_0] + 2r. \end{aligned}$$

La borne (3.8.1) est polynômiale en n et d est borné par D. Dès que n est assez grand, on a donc

$$\frac{n}{d} > N'.$$

Supposons n assez grand pour que cette inégalité soit vérifée.

Par (3.7.2), on a $\mathrm{Tr}(F_{\bar{x}}, \mathcal{F}_1) = \mathrm{Tr}(F_x, \mathcal{F}_0)$. D'après 2.13, cette trace est contenue dans le corps engendré par les $\mathrm{Tr}(F_y, \mathcal{F}_1)$ pour y dans un $X_1(\mathbb{F}_{q^m})$ avec $d \mid m$ et $\frac{m}{d}$ (le degré de $\mathbb{F}_{q^m}$ sur $\mathbb{F}_{q^d}$) au plus égal à N'. Par (3.7.2) encore, ces traces sont aussi les $\mathrm{Tr}(F_y, \widetilde{P}^*\mathcal{F}_0)$ pour y dans un $X_0(\mathbb{F}_{q^m})$ avec $\frac{m}{d} \leq N'$. On a

$$\mathrm{Tr}(F_y, \widetilde{P}^*\mathcal{F}_0) = \mathrm{Tr}(F_{\widetilde{P}(y)}, \mathcal{F}_0)$$

et $\mathrm{Tr}(F_x, \mathcal{F}_0)$ est dans le corps engendré par les $\mathrm{Tr}(F_y, \mathcal{F}_0)$ avec $y \in Z_0(\mathbb{F}_{q^m})$ et $\frac{m}{d} \leq N' < \frac{x}{d}$ et donc $m < n$. Ceci prouve 3.4.

Remarque 3.9. Si on ne suppose pas $\mathcal{F}_0$ algébrique, il reste vrai que l'extension de $\mathbb{Q}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$ engendrée par les $\mathrm{Tr}(F_x, \mathcal{F}_0)$ pour x dans un quelcongue $Z_0(\mathbb{F}_{q^n})$ est une extension de type fini. On peut le déduire par torsion du cas algébrique, ou répéter les arguments qui précèdent en appliquant 2.14.

Remarque 3.10. Sauf dans la preuve de 3.3, nos arguments n'ont utilisé le faisceau $\mathcal{F}_0$ que via ses images inverses sur des courbes lisses. Le théorème 3.1 reste donc valable si on se donne, non pas $\mathcal{F}_0$, mais des fonctions "trace" t_n sur les $X_0(\mathbb{F}_{q^n})$, à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$, ayant les deux propriétés suivantes:

a. Pour toute courbe lisse X_0 et tout morphisme $\varphi\colon\ X_0 \to Z_0$, il existe un $\overline{\mathbb{Q}}_l$-faisceau lisse $\mathcal{F}_0[\varphi]$ sur X_0, tel que pour tout n et tout $x \in X_0(\mathbb{F}_{q^n})$ on ait

$$\mathrm{Tr}(F_x, \mathcal{F}_0[\varphi]) = t_n(\varphi(x)).$$

b. Il existe un revêtement étale connexe $q\colon\ Z' \to Z$ tel que pour tout $\varphi\colon\ X_0 \to Z_0$ comme en a., notant X' la revêtement étale de X image inverse de Z', on ait: l'image inverse de $\mathcal{F}_0[\varphi]$ sur X' est modérément ramifiée à l'infini.

L'hypothèse la se substitue à 3.3. La conclusion est que les valeurs des t_n engendrent une extension de type fini de $\mathbb{Q}$ (une extension finie si les valeurs des t_n sont algébriques).

Bibliographie

[B] E. Bombieri, *On exponential sums in finite fields II.* Inv. Math. **42** (1978) p. 29–39.

[De1] P. Deligne, *Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L*, in Modular Functions of One Variable II, Lecture Notes in Mathematics **349** (Springer 1973).

[De2] P. Deligne, *La conjecture de Weil II.* Publ. Math. IHES **52** (1980) p. 137–252.

[Dr] V. Drinfeld, *On a conjecture of Deligne*, to appear in the MMJ volume dedicated to I. M. Gelfand.

[J] J.-P. Jouanolou, *Théorème de Bertini et Applications*, Progress in Math. **42**, Birkhauser 1983.

[K] N. Katz, *Sums of Betti Numbers in Arbitrary Characteristic*, Finite fields and their Applications **7** (2001) p. 29–44.

[L] L. Lafforgue, *Chtoucas de Drinfeld et correspondance de Langlands*, Inv. Math. **147** (2002) p. 1–241.

[S] J.-P. Serre, *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann 1971.

[W] G. Wiesend, *A construction of covers of arithmetic schemes*, J. Number Theory **121** 1 (2006) p. 118–131.