Tzaloa

Vieta Jumping

Adán Medrano Martín del Campo

Marzo de 2021

1. Introducción

La técnica conocida como *Vieta Jumping* es usada en problemas involucrando ecuaciones diofantinas cuadráticas de enteros positivos. Dicha técnica involucra el uso de las fórmulas de Vieta para producir así soluciones para una ecuación diofantina a partir de otra solución. Apelando a la propiedad de buen orden de los enteros positivos, esta técnica busca llegar a una solución *minimal* para nuestra ecuación diofantina: esto es, una solución que minimice algún parametro entero positivo asociado a la solución, comunmente siendo este parámetro la suma de los elementos que dan la solución.

La técnica se popularizó a partir de 1988 gracias al problema 6 de la IMO de ese año (que resolveremos posteriormente en este artículo), la cual fue celebrada en Australia. En [1] Arthur Engel escribió la siguiente nota acerca de la dificultad de este problema, la cual también se encuentra documentada en inglés en [2]:

Ninguno de los seis miembros del comité de problemas Australiano pudo resolverlo. Dos de los miembros fueron Georges Szekeres y su esposa, ambos afamados solucionadores y proponentes de problemas. Dado que era un problema de teoría de números, fue enviado a los cuatro investigadores de teoría de números Australianos con más renombre. Se les pidió trabajar en el problema por seis horas. Ninguno pudo resolverlo en ese tiempo. El comité de problemas lo mandó al jurado de la 29 IMO marcado con un doble asterisco, colocándolo así como *problema super difícil*, posiblemente demasiado difícil para proponer. Tras una larga discusión, el jurado tuvo la valentía de elegirlo como el problema final de la competencia. Once estudiantes escribieron soluciones perfectas.

2. Encontrando valores de un parámetro

Veremos como se aplica la técnica de Vieta Jumping para encontrar los posibles valores de un parámetro en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1. Sean a, b enteros positivos tales que ab divide a a^2+b^2+1. Muestra que

$$\frac{a^2+b^2+1}{ab}=3.$$

Solución. Fijemos un entero positivo k con conjunto de soluciones no vacío y consideramos las soluciones (a, b) consistiendo de enteros positivos a la ecuación

$$\frac{a^2 + b^2 + 1}{ab} = k.$$

Tomemos una solución (a, b) con suma $a+b$ mínimo con $a \geq b$. Podemos reescribir nuestra ecuación anterior como $a^2 - kab + b^2 + 1 = 0$ la cuál veremos como una ecuación cuadrática en a:

$$x^2 - kbx + b^2 + 1 = 0.$$

Por construcción, a es solución a dicha ecuación y llamaremos c a la segunda solución. Usando las fórmulas de Vieta, obtenemos que

$$\begin{aligned} a + c &= kb \\ ac &= b^2 + 1 \end{aligned}$$

de donde

$$c = kb - a = \frac{b^2 + 1}{a}$$

de la primera igualdad se obtiene que c es entero, y de la segunda que c es positvo. Esto implica que (b, c) es solución a la ecuación original. Por minimalidad de $a + b$, tenemos $c \geq a$ y como $a \geq b$,

$$a^2 \leq b^2 + 1 \leq a^2 + 1$$

y por lo tanto $a = b$. Con esto concluimos que para cada k entero positivo, las soluciones (a, b) en entero positivos con suma $a + b$ mínima a la ecuación original cumplen que $a = b$, por lo que basta considerar $a = b$ para encontrar los posibles valores de k. Tenemos pues que

$$k = \frac{2a^2 + 1}{a^2} = 2 + \frac{1}{a^2} \in \mathbb{Z}$$

y la única posibilidad para a, b es $a = b = 1$ por lo que $k = 3$, como queríamos mostrar. □

Ejemplo 2. Encuentra todos los enteros k tales que existen enteros positivos a, b tales que

$$\frac{b+1}{a} + \frac{a+1}{b} = k.$$

Solución. Notemos que podemos reescribir la ecuación del problema como

$$a^2 - a(kb - 1) + b^2 + b = 0$$

Fijamos un entero positivo k con conjunto de soluciones no vacío, y dicho conjunto de soluciones (a, b) en enteros positivos nuestra ecuación. Tomamos pues una solución con $a + b$ mínimo de entre estas soluciones, con $a \geq b$. Considerando la ecuación cuadrática en a:

$$x^2 - x(kb - 1) + b^2 + b = 0$$

observamos que a es una solución, y llamaremos c a la segunda solución. Usando las fórmulas de Vieta tenemos que

$$\begin{aligned} a + c &= kb - 1 \\ ac &= b^2 + b \end{aligned}$$

de donde

$$c = kb - 1 - a = \frac{b^2 + b}{a}$$

de donde c es un entero positivo y la pareja (b, c) es también una solución al problema original. Por minimalidad de $a + b$ obtenemos que $a \leq c$, y como $b \leq a$, tenemos que

$$a^2 \leq b^2 + b \leq a^2 + a$$

y concluimos que $a = b$. Esto quiere decir que entre las soluciones (a, b) en enteros positivos a la ecuación original, aquella que minimiza el valor de $a + b$ satisface que $a = b$, y por lo tanto basta explorar las parejas que cumplen $a = b$ para encontrar los posibles valores de k. Tenemos pues

$$k = 2\left(\frac{a+1}{a}\right) = 2 + \frac{2}{a} \in \mathbb{Z}$$

por lo que $a = 1, 2$ dando $k = 4, 3$ respectivamente. $\square$

3. Encontrando conjuntos de soluciones

En los siguientes ejemplos no solo usaremos Vieta jumping para encontrar los posibles valores de un parámetro, si no para caracterizar las todas las soluciones de un sistema sujeto a condiciones como ecuaciones o divisibilidad.

Ejemplo 3. Encuentra todas las parejas de enteros (a, b) tales que

$$ab \mid a^2 + b^2$$

Solución. Notemos que si (a, b) es una solución entonces $(a, \pm b)$ y $(-a, \pm b)$ son soluciones también. Asumiremos entonces que a, b son enteros positivos, y bastará encontrar las soluciones con dichas condiciones. Fijemos un entero positivo k y una pareja (a, b) de enteros positivos con $a \geq b$ y $a + b$ mínimo tal que

$$\frac{a^2 + b^2}{ab} = k.$$

Esto nos da una ecuación cuadrática en a:

$$x^2 - kbx + b^2 = 0$$

donde a es solución, y llamemos c a la segunda solución. Usando las fórmulas de Vieta tenemos que

$$\begin{aligned} a + c &= kb \\ ac &= b^2 \end{aligned}$$

de donde

$$c = kb - a = \frac{b^2}{a}$$

por lo que c es un entero positivo y la pareja (b, c) es también una solución al problema original. Por minimalidad de $a + b$ obtenemos que $a \leq c$, y como $b \leq a$, tenemos que

$$b^2 \leq a^2 \leq b^2$$

y por lo tanto $a = b$, lo cual implica que $k = 2$. Hemos mostrado entonces que este es el único valor entero que k puede obtener. Ahora bien, si $k = 2$ entonces $a^2 + b^2 = 2ab$, de donde

$$(a - b)^2 = 0$$

por lo que las únicas parejas de enteros positivos que satisfacen el problema son aquellas de la forma (a, a), y como el problema nos pide soluciones en enteros, las parejas que satisfacen el problema son

$$(a, a) \quad (a, -a)$$

para todo a entero distinto de 0. $\square$

Ejemplo 4. Encuentra todas las parejas de enteros positivos (a, b) tales que

$$a \mid b^2 - b + 1 \quad \text{y} \quad b \mid a^2 - a + 1$$

Solución. Una pareja (a, b) que cumple con el problema satisface que $\gcd(a, b) = 1$, de donde

$$\gcd(a, a - b) = \gcd(b, a - b) = 1.$$

Ls condiciones de divisivilidad del problema son equivalentes a que ab divide a ambos $b^3 - b^2 + b$ y $a^3 - a^2 + a$. Restando obtenemos que ab divide a $(a - b)(a^2 + ab + b^2 - a - b + 1)$, por lo tanto

$$ab \mid a^2 + b^2 - a - b + 1.$$

Ahora, fijemos un entero k y una pareja (a, b) de enteros postivos con $a \geq b$ y $a + b$ mínimo tal que

$$\frac{a^2 + b^2 - a - b + 1}{ab} = k.$$

Esto nos da una ecuación cuadrática en a:

$$x^2 - x(bk + 1) + (b^2 - b + 1) = 0$$

donde a es solución, y llamemos c a la segunda solución. Usando las fórmulas de Vieta tenemos que

$$\begin{aligned} a + c &= kb + 1 \\ ac &= b^2 - b + 1 \end{aligned}$$

de donde

$$c = kb + 1 - a = \frac{b^2 - b + 1}{a}$$

por lo que c es un entero positivo y la pareja (b, c) es también una solución al problema original. Por minimalidad de $a + b$ obtenemos que $a \leq c$, y como $b \leq a$, tenemos que

$$b^2 \leq a^2 \leq b^2 - b + 1$$

de donde $b = 1$. Entonces tenemos que

$$k = \frac{a^2 - a + 1}{a} = a - 1 + \frac{1}{a} \in \mathbb{Z}$$

de donde $a = 1$ y por lo tanto $k = 1$. Hemos mostrado entonces que este es el único valor entero que k puede obtener. Ahora bien, si $k = 1$ entonces $a^2 + b^2 - a - b + 1 = ab$, por lo que

$$(a - b)^2 + (a - 1)^2 + (b - 1)^2 = 0$$

y la única pareja (a, b) que satisface esta ecuación es $(1, 1)$, dando nuestra única solución. $\square$

4. Saltos a través de la IMO

Resolveremos algunos problemas invlucrando técnicas pertinentes a Vieta jumping que han aparecido en la IMO o en la lista corta de la IMO. Llegó el momento de resolver aquel famoso problema de 1988, y algunas de sus revanchas en años posteriores.

Ejemplo 5. (IMO 1988/6) Sean a, b enteros positivos. Muestra que si

$$\frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$$

es entero, entonces es un cuadrado perfecto.

Solución. Procedemos por contradicción. Consideremos la ecuación

$$\frac{a^2 + b^2}{ab + 1} = k$$

y fijemos un entero positivo k que no es cuadrado perfecto. Supongamos que su conjunto de soluciones es no vacío, y consideremos pues una solución (a, b) con $a + b$ mínimo y con $a \geq b$. Podemos reescribir nuestra ecuación como una ecuación cuadrática en a:

$$x^2 - kbx + b^2 - k = 0.$$

Por construcción, a es solución a dicha ecuación y llamaremos c a la segunda solución. Usando las fórmulas de Vieta tenemos que

$$\begin{aligned} a + c &= kb \\ ac &= b^2 - k \end{aligned}$$

de donde

$$c = kb - a = \frac{b^2 - k}{a}$$

por lo que c es un entero. Mostraremos ahora que c es positivo. Notemos que $c \neq 0$, de lo contrario $k = b^2$ pero k no es un cuadrado perfecto por hipótesis. Si c es negativo, entonces $-kbc \geq k$ y por lo tanto

$$0 = c^2 - kbc + b^2 - k \geq c^2 + b^2 > 0$$

lo cual es una contradición, de donde c es positivo. Esto muestra que la pareja (b, c) es ua solución en enteros positivos a nuestra ecuación, y por minimalidad de (a, b) obtenemos que $b \leq a \leq c$. Esto nos dice que

$$b^2 \leq a^2 \leq b^2 - k$$

lo cual es imposible, contradiciendo la existencia de soluciones a la ecuación

$$\frac{a^2 + b^2}{ab + 1} = k$$

con k no cuadrado perfecto. $\square$

Ejemplo 6. (IMO 2003/2) Encuentra todas las parejas de enteros positivos (a, b) tales que

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

es un entero positivo.

Solución. Notemos primero que el denominador de la fracción en cuestión es

$$D = b^2(2a - b) + 1$$

el cual debe ser positivo, pues el numerador lo es. Tenemos entonces dos posibilidades:

- Si $D = 1$ entonces $b = 2a$ y obtenemos la pareja $(a, 2a)$.
- Si $D > 1$ entonces $D > b^2$ de donde

  $$1 \leq \frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1} < \frac{a^2}{b^2}$$

  y por lo tanto $a > b$.

Ahora, fijemos un entero positivo k y tal que el conjunto de soluciones en enteros positivos a la ecuación

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1} = k$$

es no vacío. Nuestro objetivo es caracterizar dichas soluciones. Podemos reescribir nuestra ecuación como $a^2 - 2kab^2 + k(b^3 - 1) = 0$, dando una ecuación cuadrática en a:

$$x^2 - 2kb^2x + k(b^3 - 1) = 0$$

donde a es una solución, y llamemos c a la segunda solución de dicha cuadrática. Usando las fórmulas de Vieta tenemos que

$$\begin{aligned} a + c &= 2kb^2 \\ ac &= k(b^3 - 1) \end{aligned}$$

de donde
$$c = 2kb^2 - a = \frac{k(b^3-1)}{a}$$
por lo que c es un entero no negativo. Notemos que $c = 0$ si y solo si $b = 1$, en cuyo caso $a = 2k$ y obtenemos las soluciones $(2k, 1)$. Si $b > 1$ entonces ambos a, c son enteros positivos. Esto nos dice que fijando $b > 1$ junto con k, si una de las soluciones a nuestra cuadrática es entero positivo entonces la segunda también lo es. Como $a + c = 2kb^2$, entonces
$$\max\{a, c\} \geq kb^2$$
y sin pérdida de la generalidad asumimos que $a \geq c$. Obtenemos entonces que
$$0 < c = \frac{k(b^3-1)}{a} < \frac{kb^3}{kb^2} = b.$$
Habiendo probado ya que $b = 2c$ o bien $c \geq b$, concluimos que $b = 2c$. Esto nos dice que
$$a = 2kb^2 - \frac{b}{2} = \frac{2k(b^3-1)}{b}$$
de donde $k = \frac{b^2}{4}$ y se sigue que $a = \frac{b^4-b}{2}$. Esto nos da las soluciones $(8c^4 - c, 2c)$. Con esto hemos caracterizado todas las posibles soluciones a nuestra ecuación cuadrática para cada b, k, y por lo tanto hemos encontrado todas las soluciones del problema, las cuales son
$$(2n, 1) \quad (n, 2n) \quad (8n^4 - n, 2n)$$
para todo n entero positivo, y estas claramente cumplen que la fracción original es entera. □

Ejemplo 7. (IMO 2007/5) Sean a, b enteros positivos. Muestra que si
$$\frac{(4a^2-1)^2}{4ab-1}$$
es entero, entonces $a = b$.

Solución. Primero notemos que si la expresión del problema es entera, entonces
$$4ab - 1 \mid b^2(4a^2-1)^2 - (4ab-1)(4a^3b - 2ab + a^2)$$
de donde $4ab - 1$ divide a $(a - b)^2$. Probaremos entonces que si
$$\frac{(a-b)^2}{4ab-1} = k$$
es entero, entonces $k = 0$. Para esto procederemos por contradicción: fijamos k entero positivo y supongamos que su conjunto de soluciones es no vacío. Elegimos pues una solución (a, b) con $a + b$ mínimo y $a \geq b$. Tomando la ecuación cuadrática en a:
$$x^2 - x(2b + 4bk) + b^2 + k = 0$$

obtenemos que a es una solución a dicha cuadrática, y llamemos c a la segunda solución. Usando las fórmulas de Vieta tenemos que

$$a + c = 2b + 4bk$$
$$ac = b^2 + k$$

de donde

$$c = 2b + 4bk - a = \frac{b^2 + k}{a}$$

de donde c es un entero positivo. Por minimlidad de (a, b) obtenemos que $b \leq a \leq c$. Entonces

$$a^2 - b^2 \leq k = \frac{(a-b)^2}{4ab - 1}$$

pero esto implica que

$$a < (a+b)(4ab-1) \leq a - b < a$$

lo cual es imposible, contradiciendo la existencia de soluciones a la ecuación

$$\frac{(a-b)^2}{4ab-1} = k$$

para $k > 0$. De este modo, solo es posible encontrar soluciones para $k = 0$, donde es necesario que $a - b = 0$, o de manera equivalente $a = b$ como queríamos. $\square$

Ejemplo 8. (IMO Shortlist 2019/N8) Sean a, b enteros positivos. Muestra que

$$a^2 + \left\lceil \frac{4a^2}{b} \right\rceil$$

no es un cuadrado perfecto.

Solución. Procedemos por contradicción. Fijemos un entero positivo c tal que para algunos a, b enteros positivos tenemos

$$a^2 + \left\lceil \frac{4a^2}{b} \right\rceil = c^2.$$

Usando la definición de la función techo, obtenemos

$$c^2 - a^2 - 1 < \frac{4a^2}{b} \leq c^2 - a^2$$

o de manera equivalente,

$$0 \leq c^2 b - a^2(b+4) < b.$$

Consideramos la sustitución $x = c + a$ y $y = c - a$ de modo que $c = \frac{x+y}{2}$ y $a = \frac{x-y}{2}$. Entonces nuestra desigualdad anterior puede reescribirse como

$$0 \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 b - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 (b+4) < b$$

o de manera equivalente, como

$$0 \leq -x^2 - y^2 + xy(b+2) < b.$$

Llamaremos $d = xy(b+2) - x^2 - y^2$, de modo que x, y satisfacen la ecuación cuadrática

$$x^2 + xy(b+2) + y^2 + d = 0$$

donde adicionalmente sabemos que $0 \leq d < b$ y por construcción $x > y$. Fijando b, d, y obtenemos una ecuación cuadrática cuyas soluciones son x, z. Usando las fórmulas de Vieta tenemos que

$$\begin{aligned} x + z &= y(b+2) \\ xz &= y^2 + d \end{aligned}$$

de donde

$$z = y(b+2) - x = \frac{y^2 + d}{x}$$

de donde z es un entero positivo. Supongamos que fijando únicamente b, d tomamos inicialmente una pareja (x, y) con $x > y$ que satisface la ecuación cuadrática con suma mínima $x + y$. Como la pareja (y, z) también satisface nuestra ecuación cuadrática, por minimalidad de (x, y) tenemos que $x \leq z$, de donde

$$\frac{y^2 + b}{y} > \frac{y^2 + d}{x} = z \geq \frac{y(b+2)}{2}$$

lo cual implica que $2 > y^2$ y por lo tanto $y = 1$. Esto implica que nuestra cuadrática original es de la forma

$$x^2 - x(b+2) + 1 + d = 0$$

o de manera equivalente,

$$d + 1 = x(b + 2 - x) > 0$$

pero para valores enteros de x, el menor valor positivo de $x(b+2-x)$ es $b+1$, que es mayor que $d+1$ ya que $d < b$ por hipótesis. Esto contradice la existencia de soluciones a nuestra ecuación cuadrática, y por lo tanto al problema original, terminando nuestra prueba por contradicción. $\square$

5. Ejercicios

1. (Brilliant [3], Ariel Gershon) Sean a, b enteros positivos tales que $ab - 1$ divide a $a^2 + b^2$. Muestra que

$$\frac{a^2 + b^2}{ab - 1} = 5.$$

2. (Brilliant [3]) Encuentra la cantidad de parejas (n, m) de enteros $1 \leq n < m \leq 100$ tales que

$$\begin{aligned} n &\mid m^2 - 1 \\ m &\mid n^2 - 1. \end{aligned}$$

3. (Crux Mathematicorum [4]) Sean a, b, c enteros positivos tales que

$$0 < a^2 + b^2 - abc < c.$$

   Muestra que $a^2 + b^2 - abc$ es un cuadrado perfecto.

4. (Vietnam, 2002) Encuentra todos los enteros positivos n parlos cuales la ecuación

$$(a + b + c + d)^2 = n^2 abcd$$

   tiene una solución en enteros positivos.

5. (Putnam, 1933) Muestra que para cada número real N, la ecuación

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = abc + bcd + cda + dab$$

   tiene solución en enteros positivos, todos mayores que N.

6. (Vandervelde, 2013 [5]) Sean a, b, c enteros positivos tales que $abc + 1$ divide a $a^2 + b^2 + c^2$. Muestra que

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc + 1}$$

   puede escribirse como la suma de dos cuadrados perfectos positivos.

Referencias

[1] Arthur Engel, *Problem-Solving Strategies*, Springer, 1999.

[2] Yimin Ge, *The Method f Vieta Jumping*,
`https://blogs.sch.gr/sotskot/files/2011/01/Vieta_Jumping.pdf`.

[3] Brilliant, *Vieta Root Jumping*,
`https://brilliant.org/wiki/vieta-root-jumping/`

[4] Shirali, S., Problema 1420. *Crux Mathematicorum*, Volumen 15, Número 2, Febrero de 1989.
`https://cms.math.ca/wp-content/uploads/crux-pdfs/Crux_v15n02_Feb.pdf`

[5] Vandervelde, S. *A Rational Function Whose Integral Values Are Sums of Two Squares*,
`http://myslu.stlawu.edu/~svanderv/sumsquares.pdf`