Una vida con matemáticas

Talent Land

Adán Medrano Martín del Campo

University of Chicago

2 de abril de 2018

El problema de Basilea

El problema de Basilea

$$\zeta(2)$$

El problema de Basilea

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots$$

El problema de Basilea

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

El problema de Basilea

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

El problema de Basilea

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Observaciones:

El problema de Basilea

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Observaciones:

1. Esta ecuación siempre es, ha sido, y será cierta.

El problema de Basilea

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Observaciones:

1. Esta ecuación siempre es, ha sido, y será cierta.
2. Propuesto por Pietro Mengoli en 1644.

El problema de Basilea

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Observaciones:

1. Esta ecuación siempre es, ha sido, y será cierta.
2. Propuesto por Pietro Mengoli en 1644.
3. Resuelto por Leonhard Euler en 1735.

El problema de Basilea

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Observaciones:

1. Esta ecuación siempre es, ha sido, y será cierta.
2. Propuesto por Pietro Mengoli en 1644.
3. Resuelto por Leonhard Euler en 1735. **¡91 años después!**

El problema de Basilea

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Observaciones:

1. Esta ecuación siempre es, ha sido, y será cierta.
2. Propuesto por Pietro Mengoli en 1644.
3. Resuelto por Leonhard Euler en 1735. **¡91 años después!**
4. ¿Quién invitó a π?

El problema de Basilea

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Observaciones:

1. Esta ecuación siempre es, ha sido, y será cierta.
2. Propuesto por Pietro Mengoli en 1644.
3. Resuelto por Leonhard Euler en 1735. **¡91 años después!**
4. ¿Quién invitó a π?

Idea:

El problema de Basilea

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Observaciones:

1. Esta ecuación siempre es, ha sido, y será cierta.
2. Propuesto por Pietro Mengoli en 1644.
3. Resuelto por Leonhard Euler en 1735. **¡91 años después!**
4. ¿Quién invitó a π?

Idea: Teorema de **Pitágoras**

El problema de Basilea

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Observaciones:

1. Esta ecuación siempre es, ha sido, y será cierta.
2. Propuesto por Pietro Mengoli en 1644.
3. Resuelto por Leonhard Euler en 1735. **¡91 años después!**
4. ¿Quién invitó a π?

Idea: Teorema de **Pitágoras** (después de ir al gym)

Supongamos que aprendo matemáticas, ¿entonces?

Supongamos que aprendo matemáticas, ¿entonces?

- Ya no eres tan bueno para sumar y multiplicar.

Supongamos que aprendo matemáticas, ¿entonces?

- Ya no eres tan bueno para sumar y multiplicar.
- Cosas que eran *obvias*, ya no lo parecen tanto.

Supongamos que aprendo matemáticas, ¿entonces?

- Ya no eres tan bueno para sumar y multiplicar.
- Cosas que eran *obvias*, ya no lo parecen tanto.
- **Literalmente** aprendes un nuevo lenguaje.

Supongamos que aprendo matemáticas, ¿entonces?

- Ya no eres tan bueno para sumar y multiplicar.
- Cosas que eran *obvias*, ya no lo parecen tanto.
- **Literalmente** aprendes un nuevo lenguaje.
- Tus nuevos juguetes:

Supongamos que aprendo matemáticas, ¿entonces?

- Ya no eres tan bueno para sumar y multiplicar.
- Cosas que eran *obvias*, ya no lo parecen tanto.
- **Literalmente** aprendes un nuevo lenguaje.
- Tus nuevos juguetes:

$$\underbrace{\mathbb{N}}_{\text{Naturales}}$$

Supongamos que aprendo matemáticas, ¿entonces?

- Ya no eres tan bueno para sumar y multiplicar.
- Cosas que eran *obvias*, ya no lo parecen tanto.
- **Literalmente** aprendes un nuevo lenguaje.
- Tus nuevos juguetes:

$$\underbrace{\mathbb{N}}_{\text{Naturales}} \subset \underbrace{\mathbb{Z}}_{\text{Enteros}}$$

Supongamos que aprendo matemáticas, ¿entonces?

- Ya no eres tan bueno para sumar y multiplicar.
- Cosas que eran *obvias*, ya no lo parecen tanto.
- **Literalmente** aprendes un nuevo lenguaje.
- Tus nuevos juguetes:

$$\underbrace{\mathbb{N}}_{\text{Naturales}} \subset \underbrace{\mathbb{Z}}_{\text{Enteros}} \subset \underbrace{\mathbb{Q}}_{\text{Racionales}}$$

Supongamos que aprendo matemáticas, ¿entonces?

- Ya no eres tan bueno para sumar y multiplicar.
- Cosas que eran *obvias*, ya no lo parecen tanto.
- **Literalmente** aprendes un nuevo lenguaje.
- Tus nuevos juguetes:

$$\underbrace{\mathbb{N}}_{\text{Naturales}} \subset \underbrace{\mathbb{Z}}_{\text{Enteros}} \subset \underbrace{\mathbb{Q}}_{\text{Racionales}} \subset \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{Reales}}$$

Supongamos que aprendo matemáticas, ¿entonces?

- Ya no eres tan bueno para sumar y multiplicar.
- Cosas que eran *obvias*, ya no lo parecen tanto.
- **Literalmente** aprendes un nuevo lenguaje.
- Tus nuevos juguetes:

$$\underbrace{\mathbb{N}}_{\text{Naturales}} \subset \underbrace{\mathbb{Z}}_{\text{Enteros}} \subset \underbrace{\mathbb{Q}}_{\text{Racionales}} \subset \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{Reales}} \subset \underbrace{\mathbb{C}}_{\text{Complejos}}$$

Supongamos que aprendo matemáticas, ¿entonces?

- Ya no eres tan bueno para sumar y multiplicar.
- Cosas que eran *obvias*, ya no lo parecen tanto.
- **Literalmente** aprendes un nuevo lenguaje.
- Tus nuevos juguetes:

$$\underbrace{\mathbb{N}}_{\text{Naturales}} \subset \underbrace{\mathbb{Z}}_{\text{Enteros}} \subset \underbrace{\mathbb{Q}}_{\text{Racionales}} \subset \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{Reales}} \subset \underbrace{\mathbb{C}}_{\text{Complejos}}$$

- Puedes intentar probar algo **por meses**

Supongamos que aprendo matemáticas, ¿entonces?

- Ya no eres tan bueno para sumar y multiplicar.
- Cosas que eran *obvias*, ya no lo parecen tanto.
- **Literalmente** aprendes un nuevo lenguaje.
- Tus nuevos juguetes:

$$\underbrace{\mathbb{N}}_{\text{Naturales}} \subset \underbrace{\mathbb{Z}}_{\text{Enteros}} \subset \underbrace{\mathbb{Q}}_{\text{Racionales}} \subset \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{Reales}} \subset \underbrace{\mathbb{C}}_{\text{Complejos}}$$

- Puedes intentar probar algo **por meses** solo para encontrar un contraejemplo.

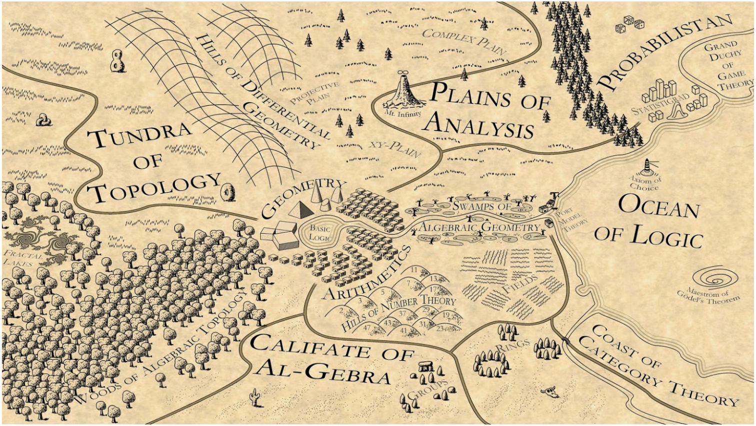
¿Entonces matemáticas es solo números y cuentas?

¿Entonces matemáticas es solo números y cuentas?

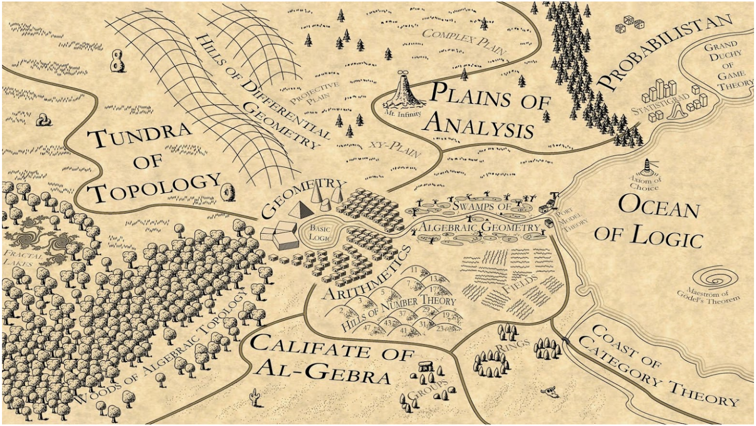
Claro que No

¿Cómo se dividen la matemáticas?

¿Cómo se dividen la matemáticas?



¿Cómo se dividen la matemáticas?



¡Y esto no es todo! (e.g. ¿Dónde está la combinatoria?)

Algunas ramas de las matemáticas

Algunas ramas de las matemáticas

Hoy en día, las matemáticas se dividen en 2 grandes grupos:

Algunas ramas de las matemáticas

Hoy en día, las matemáticas se dividen en 2 grandes grupos:

- **Puras**

Algunas ramas de las matemáticas

Hoy en día, las matemáticas se dividen en 2 grandes grupos:

- **Puras**
  - Análisis matemático

Algunas ramas de las matemáticas

Hoy en día, las matemáticas se dividen en 2 grandes grupos:

- **Puras**
  - Análisis matemático
  - Álgebra y Teoría de Números

Algunas ramas de las matemáticas

Hoy en día, las matemáticas se dividen en 2 grandes grupos:

- **Puras**
  - Análisis matemático
  - Álgebra y Teoría de Números
  - Topología y Geometría

Algunas ramas de las matemáticas

Hoy en día, las matemáticas se dividen en 2 grandes grupos:

- **Puras**
  - Análisis matemático
  - Álgebra y Teoría de Números
  - Topología y Geometría
  - Combinatoria

Algunas ramas de las matemáticas

Hoy en día, las matemáticas se dividen en 2 grandes grupos:

- **Puras**
  - Análisis matemático
  - Álgebra y Teoría de Números
  - Topología y Geometría
  - Combinatoria
  - Lógica

Algunas ramas de las matemáticas

Hoy en día, las matemáticas se dividen en 2 grandes grupos:

- **Puras**
  - Análisis matemático
  - Álgebra y Teoría de Números
  - Topología y Geometría
  - Combinatoria
  - Lógica
- **Aplicadas**

Algunas ramas de las matemáticas

Hoy en día, las matemáticas se dividen en 2 grandes grupos:

- **Puras**
  - Análisis matemático
  - Álgebra y Teoría de Números
  - Topología y Geometría
  - Combinatoria
  - Lógica
- **Aplicadas**
  - Estadística

Algunas ramas de las matemáticas

Hoy en día, las matemáticas se dividen en 2 grandes grupos:

- **Puras**
  - Análisis matemático
  - Álgebra y Teoría de Números
  - Topología y Geometría
  - Combinatoria
  - Lógica
- **Aplicadas**
  - Estadística
  - Física Matemática

Algunas ramas de las matemáticas

Hoy en día, las matemáticas se dividen en 2 grandes grupos:

- **Puras**
  - Análisis matemático
  - Álgebra y Teoría de Números
  - Topología y Geometría
  - Combinatoria
  - Lógica
- **Aplicadas**
  - Estadística
  - Física Matemática
  - Matemáticas Computacionales

Algunas ramas de las matemáticas

Hoy en día, las matemáticas se dividen en 2 grandes grupos:

- **Puras**
  - Análisis matemático
  - Álgebra y Teoría de Números
  - Topología y Geometría
  - Combinatoria
  - Lógica
- **Aplicadas**
  - Estadística
  - Física Matemática
  - Matemáticas Computacionales
  - Economía Matemática

Algunas ramas de las matemáticas

Hoy en día, las matemáticas se dividen en 2 grandes grupos:

- **Puras**
  - Análisis matemático
  - Álgebra y Teoría de Números
  - Topología y Geometría
  - Combinatoria
  - Lógica
- **Aplicadas**
  - Estadística
  - Física Matemática
  - Matemáticas Computacionales
  - Economía Matemática
  - Biología Matemática

Mi viaje por este mapa

Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition (IWYMIC) Incheon, Corea del Sur, 2010

Alberto (Nay), Adán, Juan (Jal), y Diego (NL)

Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe (OMCC) Colima, México, 2011

Juan, Adán (Jal), y Enrique (CDMX)

¡Después ganamos el nacional! (OMM) San Luis Potosí, 2011

Enrique (CDMX), Adán, Juan (Jal) sacamos examen perfecto (42 puntos)

International Mathematical Olympiad (IMO) Mar del Plata, Argentina, 2012

Julio (Oax), Jorge (CDMX), Diego (NL), Jorge, Juan, Adán (Jal)

International Mathematical Olympiad (IMO) Mar del Plata, Argentina, 2012

Pasando por mi medalla de Plata

International Mathematical Olympiad (IMO) Santa Marta, Colombia, 2013

Enrique (CDMX), Diego (NL), Adán (Jal), Kevin (NL), Juan (Jal), Xavi (Yuc)

International Mathematical Olympiad (IMO) Santa Marta, Colombia, 2013

México con medallero completo por segunda vez en la IMO

Tras la olimpiada, ¡a MIT!

Olga y yo en el Alquimista, dejándome en MIT

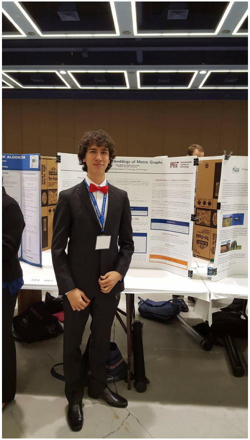
El domo nevado

Un día de invierno frente al domo

Además de matemáticas, hacía música

Mi keytar y yo

Joint Mathematics Meeting (JMM) Seattle, WA, 2016



Proyecto: Tropical Embeddings of Metric Graphs

¡A Francia en el verano!

En el arco del triunfo

Antes de la investigaciíon, Haken

Hacer investigación en Francia fue mi gran excusa para ver a Haken en París

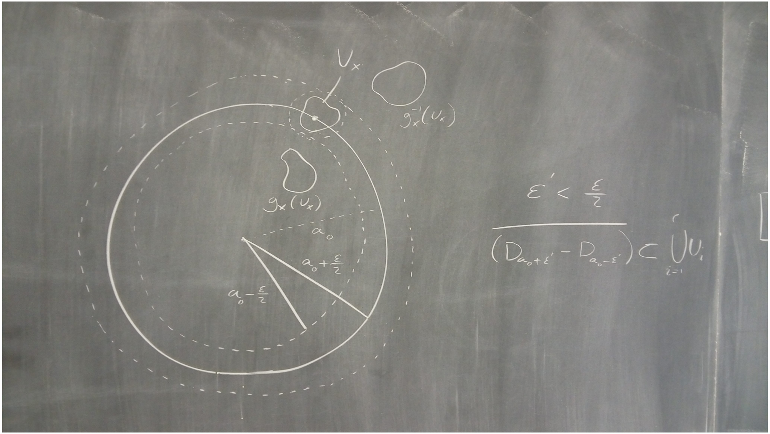
École Polytechnique
($l'X$) Palaiseau, Francia, 2016

Finalmente llegué a École Polytechnique

École Polytechnique (l'X) Palaiseau, Francia, 2016

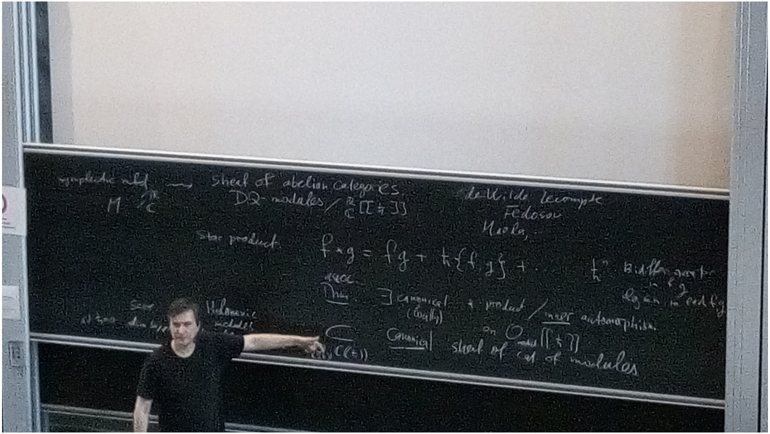
Lobby principal en Polytechnique

¿Más o menos cómo se veía mi trabajo?



Esquema del *lemma de contracción*

Summer School in Symplectic Topology (ENS) Paris, Francia, 2016

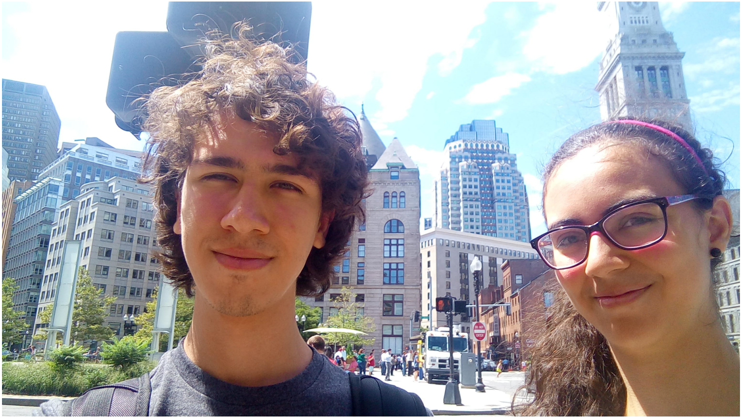


Clase de Maxime Kontsevitch (Medalla Fields, 1998)

MIT en Francia ese verano

Via el programa MISTI, fuimos de MIT a Francia

¡De regreso a Boston junto con Olga a MIT!



En Boston antes de empezar séptimo y primer semestre

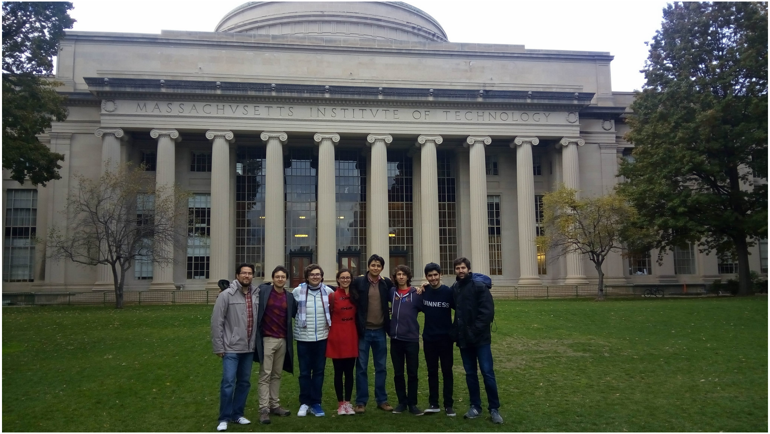
Empezamos una banda, $\psi\varphi$

Psience Phiction ensayando previo a un show (donde todo se rompió y ganamos)

Conocí a John Tate y Jean Pierre Serre, ¡en patín!

John Tate (Premio Abel, 2010), Jean Pierre Serre (Medalla Fields, 1954)

Los ex-olímpicos nos seguimos juntando



Fenir, Pablo, Kevin, Olga, Juan, Adán, Diego y Andrés

Los ex-olímpicos nos seguimos juntando

Permutación en Stata

Graduación de MIT

Equipo de 18.821: Carlos, Eli, Adán

Olga y yo dimos un curso de verano

Ceremonia de clausura del curso

Ahora, comienzo un doctorado en UChicago

Seminario Billy en la oficina de primer año

Volviendo a $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$

¿Qué dice Pitágoras?

¿Qué dice Pitágoras?

Teorema (Pitágoras):

¿Qué dice Pitágoras?

Teorema (Pitágoras): Sea ABC un triángulo cuyos lados BC, CA y AB miden a, b y c respectivamente.

¿Qué dice Pitágoras?

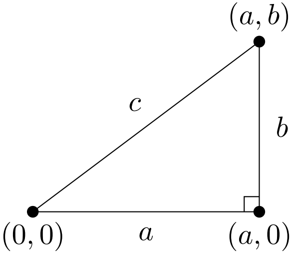
Teorema (Pitágoras): Sea ABC un triángulo cuyos lados BC, CA y AB miden a, b y c respectivamente. Entonces

$$\boxed{BC \perp AC \quad \text{si y solo si} \quad a^2 + b^2 = c^2}$$

¿Qué dice Pitágoras?

Teorema (Pitágoras): Sea ABC un triángulo cuyos lados BC, CA y AB miden a, b y c respectivamente. Entonces

$$\boxed{BC \perp AC \quad \text{si y solo si} \quad a^2 + b^2 = c^2}$$



Necesitamos **generalizar** Pitágoras. ¿Cómo?

Necesitamos **generalizar** Pitágoras. ¿Cómo?

Ingrediente	**Generalización**

Necesitamos **generalizar** Pitágoras. ¿Cómo?

Ingrediente		**Generalización**	
Plano	$\mathbb{R}^2$	Espacio de Hilbert	H

Necesitamos **generalizar** Pitágoras. ¿Cómo?

Ingrediente		**Generalización**	
Plano	$\mathbb{R}^2$	Espacio de Hilbert	H
Ángulos	$\hat{x} \perp \hat{y}$	Producto interno	$\langle \cdot, \cdot \rangle$

Necesitamos **generalizar** Pitágoras. ¿Cómo?

Ingrediente		**Generalización**	
Plano	$\mathbb{R}^2$	Espacio de Hilbert	H
Ángulos	$\hat{x} \perp \hat{y}$	Producto interno	$\langle \cdot, \cdot \rangle$
Ejes	$\{\hat{x}, \hat{y}\}$	Base ortonormal	$\{e_i\}$

Necesitamos **generalizar** Pitágoras. ¿Cómo?

Ingrediente		**Generalización**	
Plano	$\mathbb{R}^2$	Espacio de Hilbert	H
Ángulos	$\hat{x} \perp \hat{y}$	Producto interno	$\langle \cdot, \cdot \rangle$
Ejes	$\{\hat{x}, \hat{y}\}$	Base ortonormal	$\{e_i\}$

¿Producto interno?

Necesitamos **generalizar** Pitágoras. ¿Cómo?

Ingrediente		**Generalización**	
Plano	$\mathbb{R}^2$	Espacio de Hilbert	H
Ángulos	$\hat{x} \perp \hat{y}$	Producto interno	$\langle \cdot, \cdot \rangle$
Ejes	$\{\hat{x}, \hat{y}\}$	Base ortonormal	$\{e_i\}$

¿Producto interno? Compara linealmente elementos de H.

Necesitamos **generalizar** Pitágoras. ¿Cómo?

Ingrediente		**Generalización**	
Plano	$\mathbb{R}^2$	Espacio de Hilbert	H
Ángulos	$\hat{x} \perp \hat{y}$	Producto interno	$\langle \cdot, \cdot \rangle$
Ejes	$\{\hat{x}, \hat{y}\}$	Base ortonormal	$\{e_i\}$

¿Producto interno? Compara linealmente elementos de H.
¿Ortonormal?

Necesitamos **generalizar** Pitágoras. ¿Cómo?

Ingrediente		**Generalización**	
Plano	$\mathbb{R}^2$	Espacio de Hilbert	H
Ángulos	$\hat{x} \perp \hat{y}$	Producto interno	$\langle \cdot, \cdot \rangle$
Ejes	$\{\hat{x}, \hat{y}\}$	Base ortonormal	$\{e_i\}$

¿Producto interno? Compara linealmente elementos de H.
¿Ortonormal? Los $\{e_i\}$ cumplen que

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Necesitamos **generalizar** Pitágoras. ¿Cómo?

Ingrediente		**Generalización**	
Plano	$\mathbb{R}^2$	Espacio de Hilbert	H
Ángulos	$\hat{x} \perp \hat{y}$	Producto interno	$\langle \cdot, \cdot \rangle$
Ejes	$\{\hat{x}, \hat{y}\}$	Base ortonormal	$\{e_i\}$

¿Producto interno? Compara linealmente elementos de H.
¿Ortonormal? Los $\{e_i\}$ cumplen que

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \implies \angle(e_i, e_j) = \begin{cases} 0 & i = j \\ \perp & i \neq j \end{cases}$$

Pitágoras generalizado

Pitágoras generalizado

Pitágoras:

Pitágoras generalizado

Pitágoras: Si c es la distancia de $(0,0)$ a (a,b) entonces

Pitágoras generalizado

Pitágoras: Si c es la distancia de $(0,0)$ a (a,b) entonces

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

Pitágoras generalizado

Pitágoras: Si c es la distancia de $(0,0)$ a (a,b) entonces

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

Parseval:

Pitágoras generalizado

Pitágoras: Si c es la distancia de $(0,0)$ a (a,b) entonces

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

Parseval: Si $\|x\|$ es la distancia de 0 a $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$ entonces

Pitágoras generalizado

Pitágoras: Si c es la distancia de $(0,0)$ a (a,b) entonces

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

Parseval: Si $\|x\|$ es la distancia de 0 a $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$ entonces

$$\boxed{\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2}$$

Pitágoras generalizado

Pitágoras: Si c es la distancia de $(0,0)$ a (a,b) entonces

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

Parseval: Si $\|x\|$ es la distancia de 0 a $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$ entonces

$$\boxed{\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2} \quad \text{o}$$

Pitágoras generalizado

Pitágoras: Si c es la distancia de $(0,0)$ a (a,b) entonces

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

Parseval: Si $\|x\|$ es la distancia de 0 a $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$ entonces

$$\boxed{\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2} \quad \text{o} \quad \boxed{\langle x, x\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i\rangle|^2}$$

¿Con qué $H, \langle \cdot, \cdot \rangle, \{e_i\}$ trabajamos?

¿Con qué $H, \langle \cdot, \cdot \rangle, \{e_i\}$ trabajamos?

Nuestro espacio de Hilbert H de interés es

¿Con qué $H, \langle \cdot, \cdot \rangle, \{e_i\}$ trabajamos?

Nuestro espacio de Hilbert H de interés es

$$L^2([0,1], \mathbb{C})$$

¿Con qué $H, \langle \cdot, \cdot \rangle, \{e_i\}$ trabajamos?

Nuestro espacio de Hilbert H de interés es

$$L^2([0,1], \mathbb{C}) = \left\{ f : [0,1] \to \mathbb{C} \mid \int_{[0,1]} |f(t)|^2 \, dt < \infty \right\} / \sim$$

¿Con qué $H, \langle \cdot, \cdot \rangle, \{e_i\}$ trabajamos?

Nuestro espacio de Hilbert H de interés es

$$L^2([0,1], \mathbb{C}) = \left\{ f : [0,1] \to \mathbb{C} \mid \int_{[0,1]} |f(t)|^2 \, dt < \infty \right\} / \sim$$

cuyo producto interno está definido por

¿Con qué $H, \langle \cdot, \cdot \rangle, \{e_i\}$ trabajamos?

Nuestro espacio de Hilbert H de interés es

$$L^2([0,1], \mathbb{C}) = \left\{ f : [0,1] \to \mathbb{C} \mid \int_{[0,1]} |f(t)|^2 \, dt < \infty \right\} / \sim$$

cuyo producto interno está definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{[0,1]} f(t) \overline{g(t)} dt$$

¿Con qué $H, \langle \cdot, \cdot \rangle, \{e_i\}$ trabajamos?

Nuestro espacio de Hilbert H de interés es

$$L^2([0,1], \mathbb{C}) = \left\{ f : [0,1] \to \mathbb{C} \mid \int_{[0,1]} |f(t)|^2 \, dt < \infty \right\} / \sim$$

cuyo producto interno está definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{[0,1]} f(t) \overline{g(t)} dt$$

y tiene como base ortonormal a

¿Con qué $H, \langle \cdot, \cdot \rangle, \{e_i\}$ trabajamos?

Nuestro espacio de Hilbert H de interés es

$$L^2([0,1], \mathbb{C}) = \left\{ f : [0,1] \to \mathbb{C} \mid \int_{[0,1]} |f(t)|^2 \, dt < \infty \right\} / \sim$$

cuyo producto interno está definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{[0,1]} f(t) \overline{g(t)} dt$$

y tiene como base ortonormal a

$$\left\{ e^{2\pi i n x} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$$

Rumbo a calcular $\frac{\pi^2}{6}$

Rumbo a calcular $\frac{\pi^2}{6}$

Aplicando Parseval a $\boxed{f(x) = x}$ tenemos que

Rumbo a calcular $\frac{\pi^2}{6}$

Aplicando Parseval a $\boxed{f(x) = x}$ tenemos que

$$\langle x, x \rangle$$

Rumbo a calcular $\frac{\pi^2}{6}$

Aplicando Parseval a $\boxed{f(x) = x}$ tenemos que

$$\langle x, x \rangle = \int_{[0,1]} x^2 dx$$

Rumbo a calcular $\frac{\pi^2}{6}$

Aplicando Parseval a $\boxed{f(x) = x}$ tenemos que

$$\langle x, x \rangle = \int_{[0,1]} x^2 dx = \frac{1}{3}$$

Rumbo a calcular $\frac{\pi^2}{6}$

Aplicando Parseval a $\boxed{f(x) = x}$ tenemos que

$$\langle x, x \rangle = \int_{[0,1]} x^2 dx = \frac{1}{3} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \left\langle x, e^{2\pi i n x} \right\rangle \right|^2$$

Rumbo a calcular $\frac{\pi^2}{6}$

Aplicando Parseval a $\boxed{f(x) = x}$ tenemos que

$$\langle x, x\rangle = \int_{[0,1]} x^2 dx = \frac{1}{3} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\left\langle x, e^{2\pi i n x}\right\rangle\right|^2$$

y solo falta evaluar la expresión de la derecha.

Si $n = 0$ entonces

Si $n = 0$ entonces

$$|\langle x, 1 \rangle|^2$$

Si $n = 0$ entonces

$$|\langle x, 1\rangle|^2 = \left| \int_{[0,1]} x dx \right|^2$$

Si $n = 0$ entonces

$$|\langle x, 1\rangle|^2 = \left|\int_{[0,1]} x dx\right|^2 = \left|\frac{1}{2}\right|^2$$

Si $n = 0$ entonces

$$|\langle x, 1\rangle|^2 = \left|\int_{[0,1]} x dx\right|^2 = \left|\frac{1}{2}\right|^2 = \boxed{\frac{1}{4}}$$

Si $n = 0$ entonces

$$|\langle x, 1 \rangle|^2 = \left| \int_{[0,1]} x dx \right|^2 = \left| \frac{1}{2} \right|^2 = \boxed{\frac{1}{4}}$$

Si $n \neq 0$ entonces

Si $n = 0$ entonces

$$\left|\langle x, 1\rangle\right|^2 = \left|\int_{[0,1]} x dx\right|^2 = \left|\frac{1}{2}\right|^2 = \boxed{\frac{1}{4}}$$

Si $n \neq 0$ entonces

$$\begin{aligned}\left|\left\langle x, e^{2\pi i n x}\right\rangle\right|^2 &= \left|\int_{[0,1]} x e^{-2\pi i n x} dx\right|^2 \\ &= \left|\left[\frac{x e^{-2\pi i n x}}{-2\pi i n}\right]_0^1 + \int_{[0,1]} \frac{e^{-2\pi i n x}}{2\pi i n} dx\right|^2 \\ &= \left|\frac{1}{-2\pi i n}\right|^2 = \boxed{\frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{n^2}}\end{aligned}$$

Entonces concluimos que

Entonces concluimos que

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + 2\left(\frac{1}{4\pi^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

Entonces concluimos que

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + 2\left(\frac{1}{4\pi^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

de donde

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

¡Gracias!