

# Monodromía de superficies $K3$ ramificando sobre curvas cuárticas

Adán Medrano Martín del Campo

University of Chicago

IMUNAM - Seminario de Topología Algebraica

17 de marzo de 2022

# Objetivos

- ▶ Monodromía de una familia de variedades

# Objetivos

- ▶ Monodromía de una familia de variedades
- ▶ Ejemplos

# Objetivos

- ▶ Monodromía de una familia de variedades
- ▶ Ejemplos
- ▶ Cálculo explícito de una familia de superficies  $K3$

# Una fibración elíptica sobre $\mathbb{P}^1$

# Una fibración elíptica sobre $\mathbb{P}^1$

Para  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ :

$$S_\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = x(x-1)(x-\lambda)\}$$

# Una fibración elíptica sobre $\mathbb{P}^1$

Para  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ :

$$S_\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = x(x-1)(x-\lambda)\}$$

$$\overline{S_\lambda} = C_\lambda \cong T^2$$

# Una fibración elíptica sobre $\mathbb{P}^1$

Para  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ :

$$S_\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = x(x-1)(x-\lambda)\}$$

$$\overline{S_\lambda} = C_\lambda \cong T^2$$

$$\begin{array}{ccc} C_\lambda & \hookrightarrow & E & & \{(\lambda, p) \mid p \in C_\lambda\} \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\} & & \lambda \end{array}$$



# $C_\lambda$ como cubierta ramificada de $\mathbb{P}^1$

$$S_\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = x(x-1)(x-\lambda)\} \quad C_\lambda = \overline{S_\lambda}$$

# $C_\lambda$ como cubierta ramificada de $\mathbb{P}^1$

$$S_\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = x(x-1)(x-\lambda)\} \quad C_\lambda = \overline{S_\lambda}$$

$$\begin{array}{ccc} \langle \sigma \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \curvearrowright & C_\lambda \quad (x, y) \\ & & \downarrow f \\ & & \mathbb{P}^1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ x \end{array}$$

# $C_\lambda$ como cubierta ramificada de $\mathbb{P}^1$

$$S_\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = x(x-1)(x-\lambda)\} \quad C_\lambda = \overline{S_\lambda}$$

$$\langle \sigma \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \curvearrowright C_\lambda \quad (x, y)$$

|                |              |                          |
|----------------|--------------|--------------------------|
| $\downarrow f$ | $\downarrow$ | $\sigma(x, y) = (x, -y)$ |
| $\mathbb{P}^1$ | $x$          |                          |

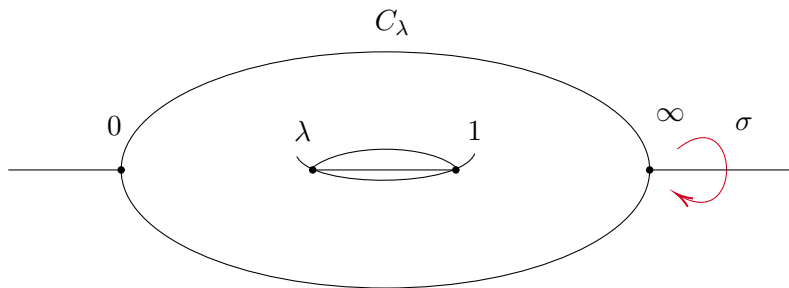
# $C_\lambda$ como cubierta ramificada de $\mathbb{P}^1$

$$S_\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = x(x-1)(x-\lambda)\} \quad C_\lambda = \overline{S_\lambda}$$

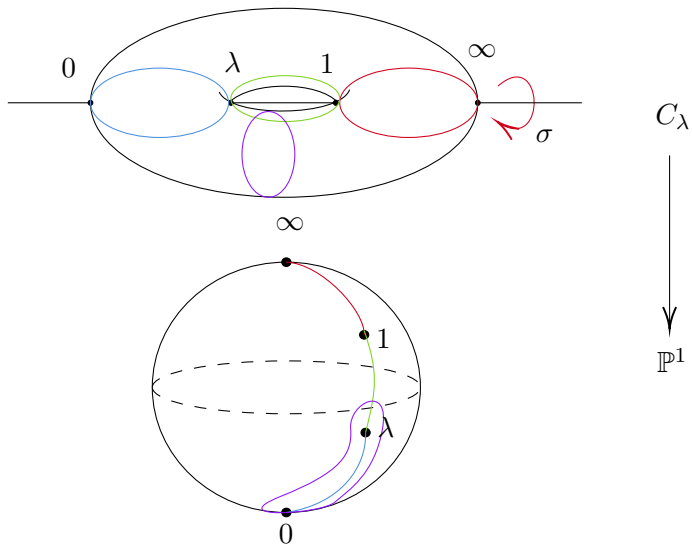
$$\langle \sigma \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \curvearrowright C_\lambda \quad (x, y)$$
$$\begin{array}{ccc} \downarrow f & \downarrow & \sigma(x, y) = (x, -y) \\ \mathbb{P}^1 & x & \end{array}$$

$$\text{Fix}(\sigma) = f^{-1}(\{0, 1, \lambda, \infty\})$$

# Involución en $C_\lambda$



# $\mathbb{P}^1$ como cociente de $C_\lambda$



# Homomorfismo de monodromía

$$\begin{array}{ccc} C_\lambda & \hookrightarrow & E \\ & & \downarrow \\ & & \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\} \end{array}$$

# Homomorfismo de monodromía

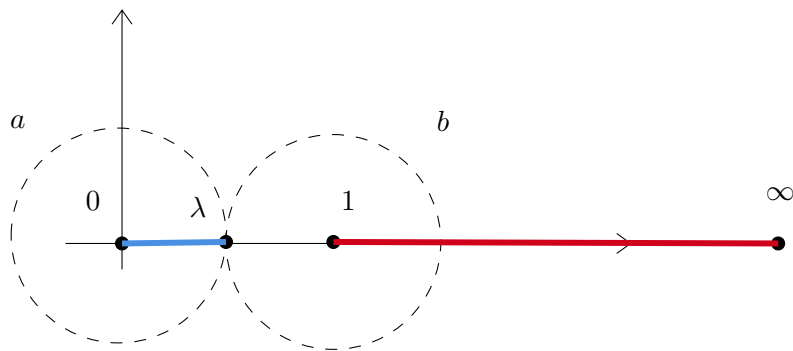
$$\begin{array}{ccc} C_\lambda & \hookrightarrow & E \\ & & \downarrow \\ & & \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\} \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \rho : \pi_1 (\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}) \rightarrow \text{Aut} (H_1 (C_\lambda; \mathbb{Z}))$$

**Monodromía**

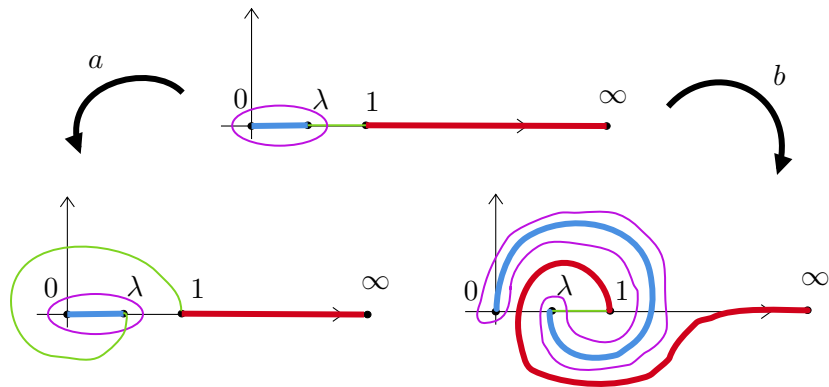


# Generadores de $\pi_1$

$$\pi_1 \left( \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}, \frac{1}{2} \right) \cong \langle a, b \rangle$$



# Acción de los generadores



## Imagen de $\rho$

Con respecto a nuestra base de  $H_1(C_\lambda; \mathbb{Z})$ :

$$\rho(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \rho(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

## Imagen de $\rho$

Con respecto a nuestra base de  $H_1(C_\lambda; \mathbb{Z})$ :

$$\rho(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \rho(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

de donde

$$\text{Im}(\rho) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad [\text{SL}_2(\mathbb{Z}) : \text{Im}(\rho)] = 12$$

# Espacios de hipersuperficies proyectivas suaves

# Hipersuperficies en $\mathbb{P}^n$

$$f \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_d$$

# Hipersuperficies en $\mathbb{P}^n$

$$f \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_d \quad \rightsquigarrow \quad V(f) = \{x \in \mathbb{P}^n \mid f(x) = 0\}$$

# Hipersuperficies en $\mathbb{P}^n$

$$f \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_d \quad \rightsquigarrow \quad V(f) = \{x \in \mathbb{P}^n \mid f(x) = 0\}$$

$$\mathbb{P}^{\binom{n+d}{d}-1} = \{V(f) \subset \mathbb{P}^n \mid f \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_d\}$$

$$[a_i] \mapsto V\left(\sum_i a_i x^i\right)$$



# Los complementos $\mathcal{U}_{n,d}$

La variedad discriminante

$$\{f \text{ singular}\} = \Delta_{n,d} \subset \mathbb{P}^{\binom{n+d}{d}-1}$$

# Los complementos $\mathcal{U}_{n,d}$

La variedad discriminante

$$\{f \text{ singular}\} = \Delta_{n,d} \subset \mathbb{P}^{\binom{n+d}{d}-1}$$

$$\mathcal{U}_{n,d} = \mathbb{P}^{\binom{n+d}{d}-1} \setminus \Delta_{n,d}$$

# Los complementos $\mathcal{U}_{n,d}$

La variedad discriminante

$$\{f \text{ singular}\} = \Delta_{n,d} \subset \mathbb{P}^{\binom{n+d}{d}-1}$$

$$\mathcal{U}_{n,d} = \mathbb{P}^{\binom{n+d}{d}-1} \setminus \Delta_{n,d}$$

¿Qué puede decirse sobre  $\pi_1(\mathcal{U}_{n,d})$ ?

# Grupo fundamental de $\mathcal{U}_{n,d}$

(Lonne) Presenta cada  $\pi_1(\mathcal{U}_{n,d})$  con  $(d-1)^n$  generadores.

# Grupo fundamental de $\mathcal{U}_{n,d}$

(Lonne) Presenta cada  $\pi_1(\mathcal{U}_{n,d})$  con  $(d-1)^n$  generadores.

►  $\pi_1(\mathcal{U}_{n,1}) \cong \pi_1(\mathbb{P}^n) \cong 0$

# Grupo fundamental de $\mathcal{U}_{n,d}$

**(Lonne)** Presenta cada  $\pi_1(\mathcal{U}_{n,d})$  con  $(d-1)^n$  generadores.

- ▶  $\pi_1(\mathcal{U}_{n,1}) \cong \pi_1(\mathbb{P}^n) \cong 0$
- ▶  $\pi_1(\mathcal{U}_{n,2}) \cong \mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$

# Grupo fundamental de $\mathcal{U}_{n,d}$

(Lonne) Presenta cada  $\pi_1(\mathcal{U}_{n,d})$  con  $(d-1)^n$  generadores.

- ▶  $\pi_1(\mathcal{U}_{n,1}) \cong \pi_1(\mathbb{P}^n) \cong 0$
- ▶  $\pi_1(\mathcal{U}_{n,2}) \cong \mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$
- ▶  $\pi_1(\mathcal{U}_{1,d}) \cong \pi_1(\text{Conf}_d(\mathbb{P}^1)) \cong B_d(S^2)$

# Grupo fundamental de $\mathcal{U}_{n,d}$

**(Lonne)** Presenta cada  $\pi_1(\mathcal{U}_{n,d})$  con  $(d-1)^n$  generadores.

- ▶  $\pi_1(\mathcal{U}_{n,1}) \cong \pi_1(\mathbb{P}^n) \cong 0$
- ▶  $\pi_1(\mathcal{U}_{n,2}) \cong \mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$
- ▶  $\pi_1(\mathcal{U}_{1,d}) \cong \pi_1(\text{Conf}_d(\mathbb{P}^1)) \cong B_d(S^2)$

**(Dolgachev-Libgober)**

$$\pi_1(\mathcal{U}_{2,3}) \cong \mathcal{H}_3(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \rtimes \text{SL}_2(\mathbb{Z})$$

donde  $\mathcal{H}_3(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$  es el grupo de Heissenberg módulo 3.



# La familia universal $E_{n,d}$

$$\begin{array}{ccc} V(f) \hookrightarrow E_{n,d} & & \{(f, x) \mid x \in V(f)\} \\ & \downarrow & \downarrow \\ & \mathcal{U}_{n,d} & f \end{array}$$

# La familia universal $E_{n,d}$

$$\begin{array}{ccc} V(f) \hookrightarrow E_{n,d} & & \{(f, x) \mid x \in V(f)\} \\ & \downarrow & \downarrow \\ & \mathcal{U}_{n,d} & f \end{array}$$

$\rightsquigarrow$

$$\rho : \pi_1(\mathcal{U}_{n,d}) \rightarrow \text{Aut}(H_{n-1}(V(f); \mathbb{Z}))$$

¿Cuál es la imagen de este homomorfismo?

$$\rho : \pi_1(\mathcal{U}_{n,d}) \rightarrow \text{Aut}(H_{n-1}(V(f); \mathbb{Z}))$$

¿Cuál es la imagen de este homomorfismo?

$$\rho : \pi_1(\mathcal{U}_{n,d}) \rightarrow \text{Aut}(H_{n-1}(V(f); \mathbb{Z}))$$

► (Ebeling) Si  $n$  es impar:

$$\text{Im}(\rho) = O_h^+(H_{n-1}(V(f); \mathbb{Z}))$$

¿Cuál es la imagen de este homomorfismo?

$$\rho : \pi_1(\mathcal{U}_{n,d}) \rightarrow \text{Aut}(H_{n-1}(V(f); \mathbb{Z}))$$

- ▶ **(Ebeling)** Si  $n$  es impar:

$$\text{Im}(\rho) = \text{O}_h^+(H_{n-1}(V(f); \mathbb{Z}))$$

- ▶ **(Janssen)** Si  $n$  es par:

$$\text{Im}(\rho) = \begin{cases} \text{Sp}(H_{n-1}(V(f); \mathbb{Z})) & \text{si } d \text{ es par} \\ \text{SpO}(H_{n-1}(V(f); \mathbb{Z}), q_{V(f)}) & \text{si } d \text{ es impar} \end{cases}$$

## Superficies de del Pezzo de grado 2

Un vínculo entre superficies cúbicas y curvas cuárticas

# Monodromía de $E_{3,3}$

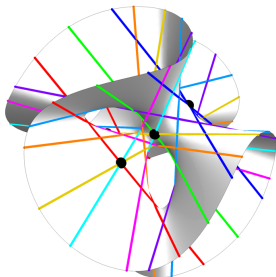
**(Klein-Jordan)**

$$\mathrm{Im}(\rho : \pi_1(\mathcal{U}_{3,3}) \rightarrow \mathrm{Aut}(H_2(V(f); \mathbb{Z}))) \cong W(E_6)$$

# Monodromía de $E_{3,3}$

(Klein-Jordan)

$$\text{Im}(\rho : \pi_1(\mathcal{U}_{3,3}) \rightarrow \text{Aut}(H_2(V(f); \mathbb{Z}))) \cong W(E_6)$$

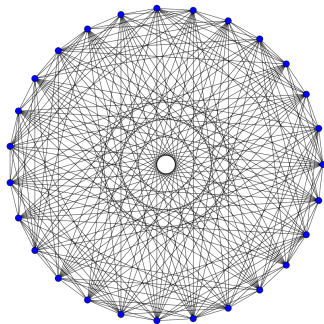


Automorfismos de las 27 líneas en una superficie cúbica suave.



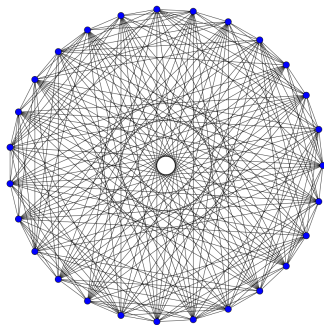
# Monodromía de $E_{3,3}$

Gráfica de Schläfli  $\Gamma_6$



# Monodromía de $E_{3,3}$

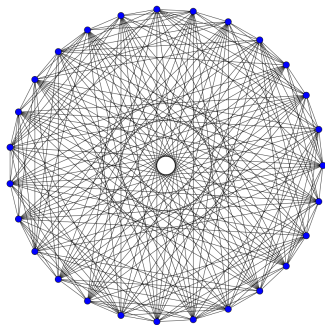
Gráfica de Schläfli  $\Gamma_6$



$$\text{Aut}(\Gamma_6) \cong W(E_6) \quad |W(E_6)| = 51840$$

# Monodromía de $E_{3,3}$

Gráfica de Schläfli  $\Gamma_6$



$$\text{Aut}(\Gamma_6) \cong W(E_6) \quad |W(E_6)| = 51840$$

Da la intersección de las 27 líneas en una superficie cúbica suave.

# Monodromía de $E_{2,4}$

$$\text{Im}(\rho : \pi_1(\mathcal{U}_{2,4}) \rightarrow \text{Aut}(H_1(V(f); \mathbb{Z}))) \cong \text{Sp}_6(\mathbb{Z})$$

# Monodromía de $E_{2,4}$

$$\text{Im}(\rho : \pi_1(\mathcal{U}_{2,4}) \rightarrow \text{Aut}(H_1(V(f); \mathbb{Z}))) \cong \text{Sp}_6(\mathbb{Z})$$

**Reducción módulo 2:**

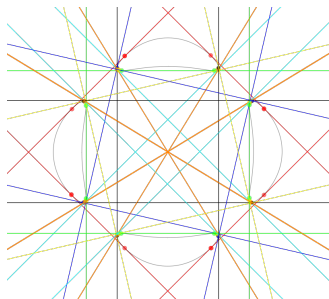
$$\text{Sp}_6(\mathbb{Z}) \rightarrow \text{Sp}_6(\mathbb{F}_2)$$

# Monodromía de $E_{2,4}$

$$\text{Im}(\rho : \pi_1(\mathcal{U}_{2,4}) \rightarrow \text{Aut}(H_1(V(f); \mathbb{Z}))) \cong \text{Sp}_6(\mathbb{Z})$$

**Reducción módulo 2:**

$$\text{Sp}_6(\mathbb{Z}) \rightarrow \text{Sp}_6(\mathbb{F}_2)$$

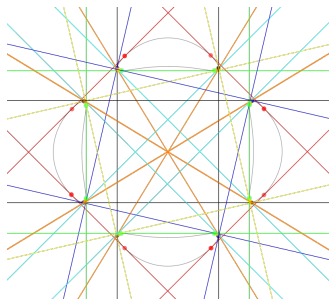


# Monodromía de $E_{2,4}$

$$\text{Im}(\rho : \pi_1(\mathcal{U}_{2,4}) \rightarrow \text{Aut}(H_1(V(f); \mathbb{Z}))) \cong \text{Sp}_6(\mathbb{Z})$$

**Reducción módulo 2:**

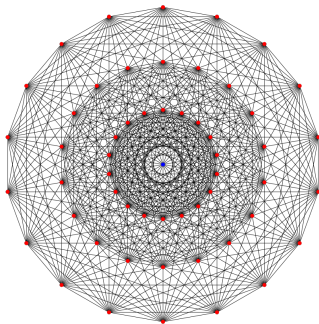
$$\text{Sp}_6(\mathbb{Z}) \rightarrow \text{Sp}_6(\mathbb{F}_2)$$



Automorfismos de las 28 bitangentes a una curva cuártica suave.

# Monodromía de $E_{2,4}$

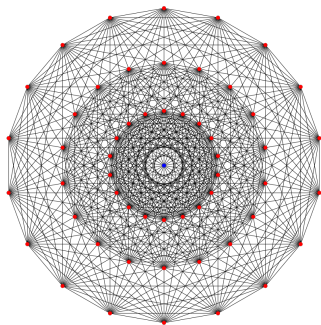
Gráfica de Gosset  $\Gamma_7$





# Monodromía de $E_{2,4}$

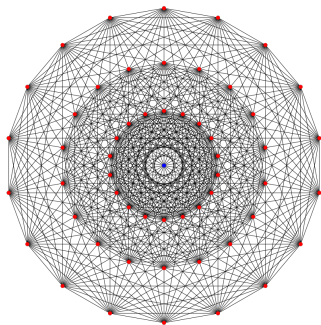
Gráfica de Gosset  $\Gamma_7$



$$\text{Aut}(\Gamma_7) \cong W(E_7) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \text{Sp}_6(\mathbb{F}_2) \quad |W(E_7)| = 56 \cdot |W(E_6)|$$

# Monodromía de $E_{2,4}$

Gráfica de Gosset  $\Gamma_7$



$$\text{Aut}(\Gamma_7) \cong W(E_7) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \text{Sp}_6(\mathbb{F}_2) \quad |W(E_7)| = 56 \cdot |W(E_6)|$$

¿Qué patrón de intersección da?

# Superficies de del Pezzo de grado 2

$$\mathcal{P} = \text{Bl}_7(\mathbb{P}^2)$$

# Superficies de del Pezzo de grado 2

$$\mathcal{P} = \text{Bl}_7(\mathbb{P}^2)$$

Hechos sobre  $\mathcal{P}$ :

# Superficies de del Pezzo de grado 2

$$\mathcal{P} = \text{Bl}_7(\mathbb{P}^2)$$

Hechos sobre  $\mathcal{P}$ :

- ▶ Contiene 56 líneas

# Superficies de del Pezzo de grado 2

$$\mathcal{P} = \text{Bl}_7(\mathbb{P}^2)$$

Hechos sobre  $\mathcal{P}$ :

- ▶ Contiene 56 líneas
- ▶ Intersección dada por la gráfica de Gosset  $\Gamma_7$

# Superficies de del Pezzo de grado 2

$$\mathcal{P} = \text{Bl}_7(\mathbb{P}^2)$$

Hechos sobre  $\mathcal{P}$ :

- ▶ Contiene 56 líneas
- ▶ Intersección dada por la gráfica de Gosset  $\Gamma_7$
- ▶ Ramifica doblemente sobre una curva cuártica  $V(f) \subset \mathbb{P}^2$

# Superficies de del Pezzo de grado 2

$$\mathcal{P} = \text{Bl}_7(\mathbb{P}^2)$$

Hechos sobre  $\mathcal{P}$ :

- ▶ Contiene 56 líneas
- ▶ Intersección dada por la gráfica de Gosset  $\Gamma_7$
- ▶ Ramifica doblemente sobre una curva cuártica  $V(f) \subset \mathbb{P}^2$
- ▶ Correspondencia 2 : 1 de

$$\{56 \text{ líneas en } \mathcal{P}\} \longleftrightarrow \{28 \text{ bitangentes a } V(f)\}$$



# Superficies de del Pezzo de grado 2

$$\mathcal{P} = \text{Bl}_7(\mathbb{P}^2)$$

Hechos sobre  $\mathcal{P}$ :

- ▶ Contiene 56 líneas
- ▶ Intersección dada por la gráfica de Gosset  $\Gamma_7$
- ▶ Ramifica doblemente sobre una curva cuártica  $V(f) \subset \mathbb{P}^2$
- ▶ Correspondencia 2 : 1 de

$$\{56 \text{ líneas en } \mathcal{P}\} \longleftrightarrow \{28 \text{ bitangentes a } V(f)\}$$

realizada por la involución  $\tau$  de **Geiser**

# Superficies de del Pezzo de grado 2

$$\mathcal{P} = \text{Bl}_7(\mathbb{P}^2)$$

Hechos sobre  $\mathcal{P}$ :

- ▶ Contiene 56 líneas
- ▶ Intersección dada por la gráfica de Gosset  $\Gamma_7$
- ▶ Ramifica doblemente sobre una curva cuártica  $V(f) \subset \mathbb{P}^2$
- ▶ Correspondencia 2 : 1 de

$$\{56 \text{ líneas en } \mathcal{P}\} \longleftrightarrow \{28 \text{ bitangentes a } V(f)\}$$

realizada por la involución  $\tau$  de **Geiser**

- ▶ Grupo de Deck de  $\mathcal{P} \rightarrow \mathbb{P}^2$

$$\langle \tau \rangle \cong Z(W(E_7)) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

# Superficies de del Pezzo de grado 2

## Relación con superficies cúbicas

# Superficies de del Pezzo de grado 2

## Relación con superficies cúbicas

$$\mathcal{P} \cong \text{Bl}_P(S) \xrightarrow{\pi} S$$

# Superficies de del Pezzo de grado 2

## Relación con superficies cúbicas

$$\mathcal{P} \cong \text{Bl}_P(S) \xrightarrow{\pi} S$$

Sea  $L = \pi^{-1}(P)$  y sean

# Superficies de del Pezzo de grado 2

## Relación con superficies cúbicas

$$\mathcal{P} \cong \text{Bl}_P(S) \xrightarrow{\pi} S$$

Sea  $L = \pi^{-1}(P)$  y sean

- ▶  $\mathcal{L}$  : bitangente a  $V(f)$  bajo  $L$

# Superficies de del Pezzo de grado 2

## Relación con superficies cúbicas

$$\mathcal{P} \cong \text{Bl}_P(S) \xrightarrow{\pi} S$$

Sea  $L = \pi^{-1}(P)$  y sean

- ▶  $\mathcal{L}$  : bitangente a  $V(f)$  bajo  $L$
- ▶  $\mathcal{S}$  : {27 líneas en  $S$ }

# Superficies de del Pezzo de grado 2

## Relación con superficies cúbicas

$$\mathcal{P} \cong \text{Bl}_P(S) \xrightarrow{\pi} S$$

Sea  $L = \pi^{-1}(P)$  y sean

- ▶  $\mathcal{L}$  : bitangente a  $V(f)$  bajo  $L$
- ▶  $\mathcal{S}$  : {27 líneas en  $S$ }
- ▶  $\mathcal{B}$  : {28 bitangentes a  $V(f)$ }



# Superficies de del Pezzo de grado 2

## Relación con superficies cúbicas

$$\mathcal{P} \cong \text{Bl}_P(S) \xrightarrow{\pi} S$$

Sea  $L = \pi^{-1}(P)$  y sean

- ▶  $\mathcal{L}$  : bitangente a  $V(f)$  bajo  $L$
- ▶  $\mathcal{S}$  : {27 líneas en  $S$ }
- ▶  $\mathcal{B}$  : {28 bitangentes a  $V(f)$ }

**(Harris)**

$$\text{Stab}(\mathcal{L}) \cong \text{Aut}(\mathcal{B} \setminus \mathcal{L}) \cong \text{Aut}(\mathcal{S}) \cong W(E_6)$$

# Familias de cubiertas ramificadas

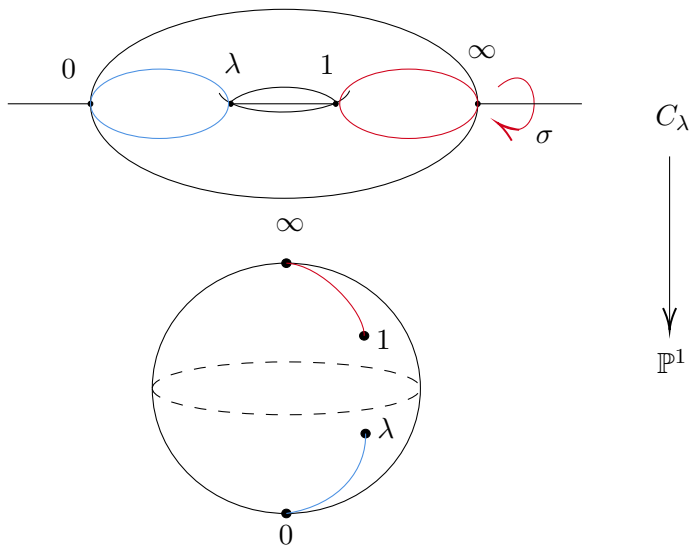
# Ramificación sobre $V(f)$

$$\begin{array}{ccc} V(f) \setminus X_f & \hookrightarrow & \mathcal{E}_{n,d} & \{(f,p) \mid p \in X_f\} \\ & & \downarrow & \downarrow \\ & & \mathcal{U}_{n,d} & f \end{array}$$

# Ramificación sobre $V(f)$

$$\begin{array}{ccc} V(f) \cup X_f \hookrightarrow \mathcal{E}_{n,d} & \{(f,p) \mid p \in X_f\} & X_f \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow k \\ \mathcal{U}_{n,d} & f & \mathbb{P}^n \supset V(f) \end{array}$$

# Ejemplo previo: Cubierta de grado 2 sobre 4 puntos



# Cubiertas ramificadas sobre curvas cuárticas en $\mathbb{P}^2$

# Cubiertas de grado $d = 4$

**(Hirzebruch)** Para  $n = 2$

$$\text{Existe } X_f \iff k \mid \deg(f).$$

# Cubiertas de grado $d = 4$

**(Hirzebruch)** Para  $n = 2$

Existe  $X_f \iff k \mid \deg(f)$ .

$$\begin{array}{c} X_f \\ \downarrow k \\ \mathbb{P}^2 \end{array}$$



# Cubiertas de grado $d = 4$

**(Hirzebruch)** Para  $n = 2$

Existe  $X_f \iff k \mid \deg(f)$ .

$$\begin{array}{c} X_f \\ \downarrow k \\ \mathbb{P}^2 \end{array} \implies k \mid 4$$

# Cubiertas de grado $d = 4$

**(Hirzebruch)** Para  $n = 2$

Existe  $X_f \iff k \mid \deg(f)$ .

$$\begin{array}{c} X_f \\ \downarrow k \\ \mathbb{P}^2 \end{array} \implies k \mid 4$$

$$V(f) \subset \mathbb{P}^2$$

# Cubiertas de grado $d = 4$

**(Hirzebruch)** Para  $n = 2$

Existe  $X_f \iff k \mid \deg(f)$ .

$$\begin{array}{c} X_f \\ \downarrow k \\ \mathbb{P}^2 \end{array} \implies k \mid 4$$

$$V(f) \subset \mathbb{P}^2 \rightsquigarrow \begin{cases} \mathcal{P}_f & k = 2 \quad (\text{del Pezzo}) \\ X_f & k = 4 \quad (\text{K3 cuártica } V(w^4 - f) \subset \mathbb{P}^3) \end{cases}$$

# Cubiertas de grado $d = 4$

**(Clave)**  $\mathcal{P}_f$  permite estudiar  $X_f$

# Cubiertas de grado $d = 4$

(Clave)  $\mathcal{P}_f$  permite estudiar  $X_f$

$$\begin{array}{ccc} & X_f & \\ & \swarrow & \downarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \\ \mathcal{P}_f & & \\ & \searrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \downarrow \\ & & \mathbb{P}^2 \longleftrightarrow V(f) \end{array}$$

# Monodromía de $\mathcal{E}_{2,4}$

$$\begin{array}{ccc} V(w^4 - f) \hookrightarrow \mathcal{E}_{2,4} & \{(f, p) \mid p \in V(w^4 - f)\} & \\ \downarrow & \downarrow & \\ \mathcal{U}_{2,4} & f & \end{array}$$

# Monodromía de $\mathcal{E}_{2,4}$

$$\begin{array}{ccc} V(w^4 - f) \hookrightarrow \mathcal{E}_{2,4} & \{(f, p) \mid p \in V(w^4 - f)\} \\ \downarrow & \downarrow \\ \mathcal{U}_{2,4} & f \end{array}$$

$\rightsquigarrow$

$$\rho_4 : \pi_1(\mathcal{U}_{2,4}) \rightarrow \text{Aut}(H^2(V(w^4 - f); \mathbb{Z}))$$

# Monodromía de $\mathcal{E}_{2,4}$

$$\begin{array}{ccc} V(w^4 - f) \hookrightarrow \mathcal{E}_{2,4} & \{(f, p) \mid p \in V(w^4 - f)\} \\ \downarrow & \downarrow \\ \mathcal{U}_{2,4} & f \end{array}$$

$\rightsquigarrow$

$$\rho_4 : \pi_1(\mathcal{U}_{2,4}) \rightarrow \text{Aut}(H^2(V(w^4 - f); \mathbb{Z})) \quad \text{Im}(\rho_4)?$$



# Monodromía de $\mathcal{E}_{2,4}$

$$\begin{array}{ccc} V(w^4 - f) \hookrightarrow \mathcal{E}_{2,4} & \{(f, p) \mid p \in V(w^4 - f)\} \\ \downarrow & \downarrow \\ \mathcal{U}_{2,4} & f \end{array}$$

$\rightsquigarrow$

$$\rho_4 : \pi_1(\mathcal{U}_{2,4}) \rightarrow \text{Aut}(H^2(V(w^4 - f); \mathbb{Z})) \quad \text{Im}(\rho_4)?$$

$\rho_4$  preserva la  $\begin{cases} \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^2} & \text{forma de intersección} \\ K_{X_f} & \text{clase canónica (pero esta es nula!)} \end{cases}$

# Monodromía de $\mathcal{E}_{2,4,2}$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_f \hookrightarrow \mathcal{E}_{2,4,2} & \{(f, p) \mid p \in \mathcal{P}_f\} & \\ \downarrow & \downarrow & \\ \mathcal{U}_{2,4} & f & \end{array}$$

# Monodromía de $\mathcal{E}_{2,4,2}$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_f \hookrightarrow \mathcal{E}_{2,4,2} & \{(f, p) \mid p \in \mathcal{P}_f\} \\ \downarrow & \downarrow \\ \mathcal{U}_{2,4} & f \end{array}$$

$\rightsquigarrow$

$$\rho_2 : \pi_1(\mathcal{U}_{2,4}) \rightarrow \text{Aut}(H^2(\mathcal{P}_f; \mathbb{Z}))$$

# Monodromía de $\mathcal{E}_{2,4,2}$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_f \hookrightarrow \mathcal{E}_{2,4,2} & \{(f, p) \mid p \in \mathcal{P}_f\} \\ \downarrow & \downarrow \\ \mathcal{U}_{2,4} & f \end{array}$$

$\rightsquigarrow$

$$\rho_2 : \pi_1(\mathcal{U}_{2,4}) \rightarrow \text{Aut}(H^2(\mathcal{P}_f; \mathbb{Z})) \quad \text{Im}(\rho_2) \subset W(E_7)$$

# Monodromía de $\mathcal{E}_{2,4,2}$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_f & \hookrightarrow & \mathcal{E}_{2,4,2} & \{(f, p) \mid p \in \mathcal{P}_f\} \\ & & \downarrow & \downarrow \\ & & \mathcal{U}_{2,4} & f \end{array}$$

$\rightsquigarrow$

$$\rho_2 : \pi_1(\mathcal{U}_{2,4}) \rightarrow \text{Aut}(H^2(\mathcal{P}_f; \mathbb{Z})) \quad \text{Im}(\rho_2) \subset W(E_7)$$

$\rho_2$  preserva la  $\begin{cases} \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^2} & \text{forma de intersección} \\ K_{\mathcal{P}_f} & \text{clase canónica } (-3H + e_1 + \cdots + e_7) \end{cases}$

# Acción del grupo de Deck $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \langle T \rangle \curvearrowright H^2(X_f; \mathbb{Z})$$

$$T : [w \mapsto iw]$$

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \langle T^2 \rangle \curvearrowright H^2(\mathcal{P}_f; \mathbb{Z})$$

$$T^2 : [w \mapsto -w]$$

$$\text{Im}(\rho_4) \subset C_{H^2(X_f; \mathbb{Z})}(T)$$

$$\text{Im}(\rho_2) \subset W(E_7)$$

# Teorema (para superficies de del Pezzo de grado 2)

(Medrano Martín del Campo)

$$\mathrm{Im}(\rho_2) \cong W(E_7).$$

# Teorema (para superficies de del Pezzo de grado 2)

(Medrano Martín del Campo)

$$\mathrm{Im}(\rho_2) \cong W(E_7).$$

(Corolario crucial)



# Teorema (para superficies de del Pezzo de grado 2)

(Medrano Martín del Campo)

$$\mathrm{Im}(\rho_2) \cong W(E_7).$$

(Corolario crucial)

Existe  $\gamma \in \pi_1(\mathcal{U}_{2,4})$  realizando la involución de Geiser  $\tau$  via  $\rho_2$ :

$$\rho_2(\gamma) = \tau$$

# Superficies $K3$ y Látices

# Superficies $K3$

(Def) Superficie compacta  $X$  tal que  $\pi_1(X) = 1$ ,  $K_X = 0$

# Superficies $K3$

(Def) Superficie compacta  $X$  tal que  $\pi_1(X) = 1$ ,  $K_X = 0$

# Superficies $K3$

(Def) Superficie compacta  $X$  tal que  $\pi_1(X) = 1$ ,  $K_X = 0$

► Diamante de Hodge:

$$\begin{array}{ccccc} & & & & 1 \\ & & & & 0 \\ & & & 0 & \\ & & & 20 & \\ 1 & & & & 1 \\ & & & 0 & \\ & & & 0 & \\ & & & 1 & \end{array}$$

# Superficies $K3$

(Def) Superficie compacta  $X$  tal que  $\pi_1(X) = 1$ ,  $K_X = 0$

- ▶ Diamante de Hodge:

$$\begin{array}{ccccc} & & & & 1 \\ & & & & 0 \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \\ 1 & & & 20 & 1 \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & 1 \end{array}$$

- ▶ Grupo de Neron-Severi/Picard:

$$\text{NS}(X) = \text{Pic}(X) = H^{1,1} \cap H^2(X; \mathbb{Z})$$

# Superficies $K3$

(Def) Superficie compacta  $X$  tal que  $\pi_1(X) = 1$ ,  $K_X = 0$

- ▶ Diamante de Hodge:

$$\begin{array}{ccccc} & & & & 1 \\ & & & & | \\ & & & 0 & & 0 \\ & & & | & & | \\ 1 & & & 20 & & 1 \\ & & & | & & | \\ & & & 0 & & 0 \\ & & & | & & | \\ & & & & & 1 \end{array}$$

- ▶ Grupo de Neron-Severi/Picard:

$$\text{NS}(X) = \text{Pic}(X) = H^{1,1} \cap H^2(X; \mathbb{Z})$$

- ▶ Número de Picard:

$$1 \leq \text{rk}(\text{NS}(X)) \leq 20$$

# Superficies $K3$



# Superficies $K3$

- ▶ Látice par unimodular  $K3$ :

$$H^2(X; \mathbb{Z}) \cong E_8(-1)^2 \oplus U^3$$

# Superficies $K3$

- ▶ Látice par unimodular  $K3$ :

$$H^2(X; \mathbb{Z}) \cong E_8(-1)^2 \oplus U^3$$

- ▶ Firma  $\sigma(X) = (3, 19)$

# Superficies $K3$

- ▶ Látice par unimodular  $K3$ :

$$H^2(X; \mathbb{Z}) \cong E_8(-1)^2 \oplus U^3$$

- ▶ Firma  $\sigma(X) = (3, 19)$
- ▶  $\kappa$  clase de Kähler:

$$\sigma(H^{2,0} \oplus H^{0,2} \oplus \langle \kappa \rangle) = (3, 0)$$

# Látices sobre $\mathbb{Z}$ , $\mathbb{Z}[i]$

**(Def)**  $(\mathbb{Z}^r, q)/(\mathbb{Z}[i]^r, q)$  con  $q$  simétrica/hermitiana

## Látices sobre $\mathbb{Z}$ , $\mathbb{Z}[i]$

**(Def)**  $(\mathbb{Z}^r, q)/(\mathbb{Z}[i]^r, q)$  con  $q$  simétrica/hermitiana

- ▶ Grupo discriminante (finito abeliano)

$$A_L = L^*/L$$

# Látices sobre $\mathbb{Z}$ , $\mathbb{Z}[i]$

**(Def)**  $(\mathbb{Z}^r, q)/(\mathbb{Z}[i]^r, q)$  con  $q$  simétrica/hermitiana

- ▶ Grupo discriminante (finito abeliano)

$$A_L = L^*/L$$

- ▶ Forma cuadrática módulo 2

$$q_L : A_L \rightarrow \mathbb{Q}/2\mathbb{Z} \quad q_L(x) = \langle x, x \rangle_{L \otimes \mathbb{Q}}$$

## Látices sobre $\mathbb{Z}$ , $\mathbb{Z}[i]$

**(Def)**  $(\mathbb{Z}^r, q)/(\mathbb{Z}[i]^r, q)$  con  $q$  simétrica/hermitiana

- ▶ Grupo discriminante (finito abeliano)

$$A_L = L^*/L$$

- ▶ Forma cuadrática módulo 2

$$q_L : A_L \rightarrow \mathbb{Q}/2\mathbb{Z} \quad q_L(x) = \langle x, x \rangle_{L \otimes \mathbb{Q}}$$

- ▶ Grupo ortogonal

$$O(q_L) = \text{Aut}(A_L, q_L)$$

# Descomposición de $H^2(X; \mathbb{Z})$

(**Clave**) Sublátices  $L_+, L_- \subset H^2(X; \mathbb{Z})$



# Descomposición de $H^2(X; \mathbb{Z})$

(**Clave**) Sublátices  $L_+, L_- \subset H^2(X; \mathbb{Z})$

$$L_+ = \{(T^2 - I)x = 0\} \cong H^2(\mathcal{P}; \mathbb{Z})(2)$$

$$L_- = \{(T^2 + I)x = 0\} \cong A_1^2 \oplus D_4^2 \oplus U \oplus U(2)$$

# Descomposición de $H^2(X; \mathbb{Z})$

(**Clave**) Sublátices  $L_+, L_- \subset H^2(X; \mathbb{Z})$

$$L_+ = \{(T^2 - I)x = 0\} \cong H^2(\mathcal{P}; \mathbb{Z})(2)$$

$$L_- = \{(T^2 + I)x = 0\} \cong A_1^2 \oplus D_4^2 \oplus U \oplus U(2)$$

Hechos sobre  $L_{\pm}$ :

# Descomposición de $H^2(X; \mathbb{Z})$

(**Clave**) Sublátices  $L_+, L_- \subset H^2(X; \mathbb{Z})$

$$L_+ = \{(T^2 - I)x = 0\} \cong H^2(\mathcal{P}; \mathbb{Z})(2)$$

$$L_- = \{(T^2 + I)x = 0\} \cong A_1^2 \oplus D_4^2 \oplus U \oplus U(2)$$

Hechos sobre  $L_{\pm}$ :

- ▶  $L_+ \oplus L_-$  de índice finito ( $2^8$ ) en  $H^2(X; \mathbb{Z})$

# Descomposición de $H^2(X; \mathbb{Z})$

(Clave) Sublátices  $L_+, L_- \subset H^2(X; \mathbb{Z})$

$$L_+ = \{(T^2 - I)x = 0\} \cong H^2(\mathcal{P}; \mathbb{Z})(2)$$

$$L_- = \{(T^2 + I)x = 0\} \cong A_1^2 \oplus D_4^2 \oplus U \oplus U(2)$$

Hechos sobre  $L_{\pm}$ :

- ▶  $L_+ \oplus L_-$  de índice finito ( $2^8$ ) en  $H^2(X; \mathbb{Z})$
- ▶  $L_{\pm}$  son complementos ortogonales y primitivos en  $H^2(X; \mathbb{Z})$

# Descomposición de $H^2(X; \mathbb{Z})$

(**Clave**) Sublátices  $L_+, L_- \subset H^2(X; \mathbb{Z})$

$$L_+ = \{(T^2 - I)x = 0\} \cong H^2(\mathcal{P}; \mathbb{Z})(2)$$

$$L_- = \{(T^2 + I)x = 0\} \cong A_1^2 \oplus D_4^2 \oplus U \oplus U(2)$$

Hechos sobre  $L_{\pm}$ :

- ▶  $L_+ \oplus L_-$  de índice finito ( $2^8$ ) en  $H^2(X; \mathbb{Z})$
- ▶  $L_{\pm}$  son complementos ortogonales y primitivos en  $H^2(X; \mathbb{Z})$
- ▶ Grupos discriminantes

$$A_{L_+} \cong A_{L_-} \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^8$$

# Descomposición de $H^2(X; \mathbb{Z})$

(**Clave**) Sublátices  $L_+, L_- \subset H^2(X; \mathbb{Z})$

$$L_+ = \{(T^2 - I)x = 0\} \cong H^2(\mathcal{P}; \mathbb{Z})(2)$$

$$L_- = \{(T^2 + I)x = 0\} \cong A_1^2 \oplus D_4^2 \oplus U \oplus U(2)$$

Hechos sobre  $L_{\pm}$ :

- ▶  $L_+ \oplus L_-$  de índice finito ( $2^8$ ) en  $H^2(X; \mathbb{Z})$
- ▶  $L_{\pm}$  son complementos ortogonales y primitivos en  $H^2(X; \mathbb{Z})$
- ▶ Grupos discriminantes

$$A_{L_+} \cong A_{L_-} \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^8$$

- ▶ Grupos ortogonales

$$O(q_{L_+}) \cong O(q_{L_-}) \cong W(E_7)$$

# Descomposición de $H^2(X; \mathbb{C})$

$X$  está equipado con  $T$  tal que  $T^4 = I$ .

$T$  orden finito  $\implies T$  respeta estructura de Hodge

# Descomposición de $H^2(X; \mathbb{C})$

$X$  está equipado con  $T$  tal que  $T^4 = I$ .

$T$  orden finito  $\implies T$  respeta estructura de Hodge

► Descomposición de Hodge:

$$H^2(X; \mathbb{C}) \cong \bigoplus_{p+q=2} H^{p,q}(X; \mathbb{C})$$



# Descomposición de $H^2(X; \mathbb{C})$

$X$  está equipado con  $T$  tal que  $T^4 = I$ .

$T$  orden finito  $\implies T$  respeta estructura de Hodge

- ▶ Descomposición de Hodge:

$$H^2(X; \mathbb{C}) \cong \bigoplus_{p+q=2} H^{p,q}(X; \mathbb{C})$$

- ▶ Eigenespacios  $V_\zeta = \ker(T - \zeta I)$ :

$$H^2(X; \mathbb{C}) \cong \bigoplus_{\zeta^4=1} V_\zeta$$

# Mezclando descomposiciones

Intersectando ambas descomposiciones:

|           | $V_1$        | $V_{-1}$       | $V_i$          | $V_{-i}$       |
|-----------|--------------|----------------|----------------|----------------|
| $H^{2,0}$ | 0            | 0              | $\mathbb{C}$   | 0              |
| $H^{1,1}$ | $\mathbb{C}$ | $\mathbb{C}^7$ | $\mathbb{C}^6$ | $\mathbb{C}^6$ |
| $H^{0,2}$ | 0            | 0              | 0              | $\mathbb{C}$   |

# Mezclando descomposiciones

Intersectando ambas descomposiciones:

|           | $V_1$        | $V_{-1}$       | $V_i$          | $V_{-i}$       |
|-----------|--------------|----------------|----------------|----------------|
| $H^{2,0}$ | 0            | 0              | $\mathbb{C}$   | 0              |
| $H^{1,1}$ | $\mathbb{C}$ | $\mathbb{C}^7$ | $\mathbb{C}^6$ | $\mathbb{C}^6$ |
| $H^{0,2}$ | 0            | 0              | 0              | $\mathbb{C}$   |

Como  $\mathbb{Z}[i]$ -módulo,  $L_- \cong \mathbb{Z}[i]^7$

# Mezclando descomposiciones

Intersectando ambas descomposiciones:

|           | $V_1$        | $V_{-1}$       | $V_i$          | $V_{-i}$       |
|-----------|--------------|----------------|----------------|----------------|
| $H^{2,0}$ | 0            | 0              | $\mathbb{C}$   | 0              |
| $H^{1,1}$ | $\mathbb{C}$ | $\mathbb{C}^7$ | $\mathbb{C}^6$ | $\mathbb{C}^6$ |
| $H^{0,2}$ | 0            | 0              | 0              | $\mathbb{C}$   |

Como  $\mathbb{Z}[i]$ -módulo,  $L_- \cong \mathbb{Z}[i]^7$

$$j_{\mathbb{C}} : L_- \otimes_{\mathbb{Z}[i]} \mathbb{C} \rightarrow V_i$$

$j_{\mathbb{C}}$  isomorfismo isométrico

# Mezclando descomposiciones

Intersectando ambas descomposiciones:

|           | $V_1$        | $V_{-1}$       | $V_i$          | $V_{-i}$       |
|-----------|--------------|----------------|----------------|----------------|
| $H^{2,0}$ | 0            | 0              | $\mathbb{C}$   | 0              |
| $H^{1,1}$ | $\mathbb{C}$ | $\mathbb{C}^7$ | $\mathbb{C}^6$ | $\mathbb{C}^6$ |
| $H^{0,2}$ | 0            | 0              | 0              | $\mathbb{C}$   |

Como  $\mathbb{Z}[i]$ -módulo,  $L_- \cong \mathbb{Z}[i]^7$

$$j_{\mathbb{C}} : L_- \otimes_{\mathbb{Z}[i]} \mathbb{C} \rightarrow V_i$$

$j_{\mathbb{C}}$  isomorfismo isométrico

$$V_i \cong \mathbb{C}^{1,6} \cong (\mathbb{C}^7, |z_0|^2 - |z_1|^2 - \dots - |z_6|^2)$$

## $L_-$ como $\mathbb{Z}[i]$ -látice

(Kondo) Como  $\mathbb{Z}$ -látice

$$L_- \cong A_1^2 \oplus D_4^2 \oplus U \oplus U(2)$$

$T$  actúa en  $A_1^2$ ,  $U \oplus U(2)$  y cada copia de  $D_4$

## $L_-$ como $\mathbb{Z}[i]$ -látice

**(Kondo)** Como  $\mathbb{Z}$ -látice

$$L_- \cong A_1^2 \oplus D_4^2 \oplus U \oplus U(2)$$

$T$  actúa en  $A_1^2$ ,  $U \oplus U(2)$  y cada copia de  $D_4$

**(Medrano Martín del Campo)**

$$\begin{aligned} h_{L_-} = & -2(|z_0|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2) \\ & + 2\Re(z_1\bar{z}_2 + z_3\bar{z}_4 + z_5\bar{z}_6) \\ & + 2\Im(z_1\bar{z}_2 + z_3\bar{z}_4 + z_5\bar{z}_6) \end{aligned}$$

Como  $\mathbb{Z}[i]$ -látice

$$L_- \cong (\mathbb{Z}[i]^7, h_{L_-})$$

## Cálculo de $\text{Im}(\rho_4)$



## Reducción a $L_-$

(Clave)  $\rho_4$  actúa en cada  $V_{\zeta}$ , y por lo tanto  $L_+$ ,  $L_-$

$$\rho_4^+ = \rho_4|_{L_+} \quad \rho_4^- = \rho_4|_{L_-}$$

## Reducción a $L_-$

(Clave)  $\rho_4$  actúa en cada  $V_\zeta$ , y por lo tanto  $L_+$ ,  $L_-$

$$\rho_4^+ = \rho_4|_{L_+} \quad \rho_4^- = \rho_4|_{L_-}$$

- Reconstruye  $\rho_4$  a partir de  $\rho_4^+, \rho_4^-$ .

## Reducción a $L_-$

(Clave)  $\rho_4$  actúa en cada  $V_{\zeta}$ , y por lo tanto  $L_+$ ,  $L_-$

$$\rho_4^+ = \rho_4|_{L_+} \quad \rho_4^- = \rho_4|_{L_-}$$

- ▶ Reconstruye  $\rho_4$  a partir de  $\rho_4^+, \rho_4^-$ .
- ▶ Para  $L_{\pm}$  existen homomorfismos suprayectivos

$$O(L_{\pm}) \rightarrow O(q_{L_{\pm}}) \cong W(E_7)$$

## Reducción a $L_-$

(Clave)  $\rho_4$  actúa en cada  $V_{\zeta}$ , y por lo tanto  $L_+$ ,  $L_-$

$$\rho_4^+ = \rho_4|_{L_+} \quad \rho_4^- = \rho_4|_{L_-}$$

- ▶ Reconstruye  $\rho_4$  a partir de  $\rho_4^+, \rho_4^-$ .
- ▶ Para  $L_{\pm}$  existen homomorfismos suprayectivos

$$O(L_{\pm}) \rightarrow O(q_{L_{\pm}}) \cong W(E_7)$$

- ▶ La imagen de  $\rho_4^+$  en  $O(L_+)$  es  $W(E_7)$

## Reducción a $L_-$

**(Lema)**  $\text{Im}(\rho_4) \cong \text{Im}(\rho_4^-)$  pues

$$\rho_4^-(g) = 0 \implies \rho_4^+(g) = 0$$

# Reducción a $L_-$

**(Lema)**  $\text{Im}(\rho_4) \cong \text{Im}(\rho_4^-)$  pues

$$\rho_4^-(g) = 0 \implies \rho_4^+(g) = 0$$

Usamos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & O(L_-) & \xrightarrow{\text{mod}(L_-)} \twoheadrightarrow & O(qL_-) \\
 & \nearrow^{\rho_4^-} & & \nearrow^{\text{res}(L_-)} & & \nearrow^{c_{L_-}} \\
 \pi_1(\mathcal{U}_4) & \xrightarrow{\rho_4} \twoheadrightarrow & \text{Im}(\rho_4) & \xrightarrow{\text{mod}(L_+ \oplus L_-)} & O(H) & \begin{array}{c} \nearrow^{\mathbb{R}} \\ \searrow^{\mathbb{R}} \end{array} \\
 & \searrow_{\rho_4^+} & & \searrow_{\text{res}(L_+)} & & \begin{array}{c} \mathbb{R} \\ \uparrow c_{\gamma_{L_+ L_-}} \\ \mathbb{R} \end{array} \\
 & & & W(E_7) & \xrightarrow[\text{mod}(L_+)]{\mathbb{R}} \twoheadrightarrow & O(qL_+)
 \end{array}$$

# Moduli de curvas cuárticas suaves

# El moduli de curvas cuárticas suaves $\mathcal{M}_3$

$$\mathrm{Im}(\rho_4^-) \subset U(\mathbb{Z}[i]^7, h_{L_-}) = \Gamma$$



# El moduli de curvas cuárticas suaves $\mathcal{M}_3$

$$\mathrm{Im}(\rho_4^-) \subset U(\mathbb{Z}[i]^7, h_{L_-}) = \Gamma$$

Definimos

# El moduli de curvas cuárticas suaves $\mathcal{M}_3$

$$\mathrm{Im}(\rho_4^-) \subset U(\mathbb{Z}[i]^7, h_{L_-}) = \Gamma$$

Definimos

►  $\mathbb{P}(\Gamma) = \Gamma/\mathbb{Z}[i]^*$

# El moduli de curvas cuárticas suaves $\mathcal{M}_3$

$$\mathrm{Im}(\rho_4^-) \subset U(\mathbb{Z}[i]^7, h_{L_-}) = \Gamma$$

Definimos

- ▶  $\mathbb{P}(\Gamma) = \Gamma/\mathbb{Z}[i]^*$
- ▶  $\mathcal{D}_6 = \{z \in \mathbb{P}(V_i) \mid \langle z, \bar{z} \rangle > 0\}$  bola compleja

# El moduli de curvas cuárticas suaves $\mathcal{M}_3$

$$\mathrm{Im}(\rho_4^-) \subset U(\mathbb{Z}[i]^7, h_{L_-}) = \Gamma$$

Definimos

- ▶  $\mathbb{P}(\Gamma) = \Gamma/\mathbb{Z}[i]^*$
- ▶  $\mathcal{D}_6 = \{z \in \mathbb{P}(V_i) \mid \langle z, \bar{z} \rangle > 0\}$  bola compleja
- ▶  $H_\delta$  hiperplano negativo ortogonal a  $\delta \in V_i$

$$\mathcal{H} = \bigcup_{\langle \delta, \delta \rangle = -2} H_\delta$$

# El moduli de curvas cuárticas suaves $\mathcal{M}_3$

$$\text{Im}(\rho_4^-) \subset U(\mathbb{Z}[i]^7, h_{L_-}) = \Gamma$$

Definimos

- ▶  $\mathbb{P}(\Gamma) = \Gamma/\mathbb{Z}[i]^*$
- ▶  $\mathcal{D}_6 = \{z \in \mathbb{P}(V_i) \mid \langle z, \bar{z} \rangle > 0\}$  bola compleja
- ▶  $H_\delta$  hiperplano negativo ortogonal a  $\delta \in V_i$

$$\mathcal{H} = \bigcup_{\langle \delta, \delta \rangle = -2} H_\delta$$

**(Kondo)**  $\mathcal{M}_3$  moduli de curvas cuárticas suaves

$$\mathcal{M}_3 \cong (\mathcal{D}_6 - \mathcal{H})/\mathbb{P}(\Gamma)$$

# Enmarcando $\mathcal{M}_3$

(Allcock, Carlson, Toledo) Considera moduli enmarcados

# Enmarcando $\mathcal{M}_3$

(Allcock, Carlson, Toledo) Considera moduli enmarcados

$$\widetilde{\mathcal{M}}_3 = \{(Q, \lambda) \mid Q \in \mathcal{M}_3, \lambda : (\mathbb{Z}[i]^7, h_{L_-}) \xrightarrow{\cong} L_-\}$$

## Enmarcando $\mathcal{M}_3$

(Allcock, Carlson, Toledo) Considera moduli enmarcados

$$\widetilde{\mathcal{M}}_3 = \{(Q, \lambda) \mid Q \in \mathcal{M}_3, \lambda : (\mathbb{Z}[i]^7, h_{L_-}) \xrightarrow{\cong} L_-\}$$

$(Q, \lambda)$  define una superficie  $K3$ , salvo una unidad en  $\mathbb{Z}[i]$ .

$$\mathbb{P}(\Gamma) \curvearrowright \widetilde{\mathcal{M}}_3 \quad \lambda \mapsto \lambda \circ g^{-1}$$



## Enmarcando $\mathcal{M}_3$

(Allcock, Carlson, Toledo) Considera moduli enmarcados

$$\widetilde{\mathcal{M}}_3 = \{(Q, \lambda) \mid Q \in \mathcal{M}_3, \lambda : (\mathbb{Z}[i]^7, h_{L_-}) \xrightarrow{\cong} L_-\}$$

$(Q, \lambda)$  define una superficie  $K3$ , salvo una unidad en  $\mathbb{Z}[i]$ .

$$\mathbb{P}(\Gamma) \curvearrowright \widetilde{\mathcal{M}}_3 \quad \lambda \mapsto \lambda \circ g^{-1}$$

(Torelli) Mapa periodo  $\wp$  para superficies  $K3$  es un isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathcal{M}}_3 & \xrightarrow[\cong]{\wp} & \mathcal{D}_6 - \mathcal{H} \\ \mathbb{P}(\Gamma) \downarrow & & \downarrow \mathbb{P}(\Gamma) \\ \mathcal{M}_3 & \xrightarrow[\wp]{\cong} & (\mathcal{D}_6 - \mathcal{H})/\mathbb{P}(\Gamma) \end{array}$$

# Reduciendo curvas de $\mathcal{U}_{2,4}$ a $\mathcal{M}_3$

Moduli de curvas de género 3

$$\mathcal{M}_3 = \mathcal{M}_3 \cup \mathcal{H}_3$$

# Reduciendo curvas de $\mathcal{U}_{2,4}$ a $\mathcal{M}_3$

Moduli de curvas de género 3

$$\mathcal{M}_3 = \mathcal{M}_3 \cup \mathcal{H}_3$$

- ▶  $\mathcal{H}_3$  locus hiperelíptico (codimensión 1)

# Reduciendo curvas de $\mathcal{U}_{2,4}$ a $\mathcal{M}_3$

Moduli de curvas de género 3

$$\mathcal{M}_3 = \mathcal{M}_3 \cup \mathcal{H}_3$$

- ▶  $\mathcal{H}_3$  locus hiperelíptico (codimensión 1)
- ▶  $\mathcal{M}_3$  locus cuártico (codimensión 0)

$$\mathcal{M}_3 = \mathcal{U}_{2,4}/\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$$

# Reduciendo curvas de $\mathcal{U}_{2,4}$ a $\mathcal{M}_3$

Moduli de curvas de género 3

$$\mathcal{M}_3 = \mathcal{M}_3 \cup \mathcal{H}_3$$

- ▶  $\mathcal{H}_3$  locus hiperelíptico (codimensión 1)
- ▶  $\mathcal{M}_3$  locus cuártico (codimensión 0)

$$\mathcal{M}_3 = \mathcal{U}_{2,4}/\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$$

- ▶ Resto de los divisores  $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}_3$  son de mayor codimensión

$$\pi_1(\mathcal{U}_{2,4}) \rightarrow \pi_1(\mathcal{M}_3)$$

suprayectivo.

# Juntando todo

$\text{Im}(\rho_4)$  está dado por la imagen de

$$\pi_1(\mathcal{M}_3) \rightarrow \Gamma$$

## Juntando todo

$\text{Im}(\rho_4)$  está dado por la imagen de

$$\pi_1(\mathcal{M}_3) \rightarrow \Gamma$$

►  $\mathcal{D}_6 - \mathcal{H}$  es conexo

$$\mathbb{P}(\Gamma) \subset \text{Im}(\rho_4)$$

# Juntando todo

$\text{Im}(\rho_4)$  está dado por la imagen de

$$\pi_1(\mathcal{M}_3) \rightarrow \Gamma$$

- ▶  $\mathcal{D}_6 - \mathcal{H}$  es conexo

$$\mathbb{P}(\Gamma) \subset \text{Im}(\rho_4)$$

- ▶  $\gamma \in \pi_1(\mathcal{U}_{2,4})$  realizando involución de Geiser realiza

$$\langle T \rangle \cong \mathbb{Z}[i]^* \subset \text{Im}(\rho_4)$$



# Teorema principal (para superficies $K3$ )

(Medrano Martín del Campo)

$$\mathrm{Im}(\rho_4) \cong U(\mathbb{Z}[i]^7, h_{L_-})$$

# Teorema principal (para superficies $K3$ )

(Medrano Martín del Campo)

$$\mathrm{Im}(\rho_4) \cong U(\mathbb{Z}[i]^7, h_{L_-})$$

Para más detalles, ver:

*Monodromy of the family of  $K3$  and del Pezzo surfaces  
branching over smooth quartic curves*